8 ゲーム理論

Von Neumann and Morgenstern ((1944, 1947, 1953))

8.1 協力ゲーム理論

8.1.1 結託・コア（TU Game）

Player の集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$（ここでは有限集合としておく[52]）に対して，I の部分集合（**結託 coalition** と呼ぶ）に定義された非負の値をとる実数値関数 $v : \Sigma \to R_+$（ここで Σ は I の部分集合全体からなる集合）が $v(\emptyset) = 0$ を満たすとき，v を（Player の集合 I 上の）**協力ゲーム**と呼ぶ．

協力ゲーム $v : \Sigma \to R_+$ が与えられているとき，Σ 上に定義された加法的測度 $\mu : \Sigma \to R_+$ （$\mu(\emptyset) = 0$ であり，$A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \emptyset$ ならば $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A + B)$ なるもの）を，そのゲームの**配分 allocation** と呼び，配分 μ が $\mu(I) \leq v(I)$ を満たすとき，それを**実現可能な配分 feasible allocation** と呼ぶ．

実現可能な配分 μ が，$\forall S \in \Sigma$ に対して $\mu(S) \geq v(S)$ を満たすとき，μ をゲーム v の**コア配分 core allocation** と呼ぶ．ゲーム v のコア配分の全体からなる集合を，ゲーム v の**コア core** と呼ぶ．

> 上で定義されているゲーム v およびコア概念は，一つの結託 A が与えられたとき，その結託全体として実現可能な実数値 $v(A) \in R_+$ にのみ着目しており，その結託内でさらにどのようにそれを分けることができるかについては触れていない．いわば，その合計量を自由に分配できるという想定の下で理解されているものであり，Games with Transferable Utilities (TU Games) と呼ばれる．

8.1.2 協力ゲーム理論と一般均衡理論（Non-TU Game）

本節では単純交換経済のみを扱う．生産を考慮した場合の議論が全く不可能というわけではないが，静学的一般均衡理論における企業の取り扱いが利潤を最大化する企業とその利潤の株主間への比例的配分という以上に踏み込んだ構造を描いていない以上，株主の結託が生産行動に与える影響を表現する自明と言える方法が存在しないので，ここでは扱わない．

【経済の Core】

単純交換経済 $\mathcal{E} = (X_i, \precsim_i, \omega_i)_{i=1}^m$ において，消費者の集合 $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ の部分集合を coalition（結託）と呼ぶ．いかなる種類の結託を認めるかということは，議論によって異なるが，ここでは簡単のため全ての部分集合が許容された結託 (admissible coalition) であるものとする．経済 $\mathcal{E}$ において許容された結託のありかたの全体を $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ で表す．

経済 $\mathcal{E}$ における資源配分 $\{x_i\}_{i=1}^m$ が結託 $S \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ によって Block（あるいは improve on ）されるとは，S のメンバーが，最初に保有していた $\{\omega_i\}_{i \in S}$ を用いて，S に配分された $\{x_i\}_{i \in S}$ よりも望ましい状態を実現できること，厳密に述べると，

> (Block) ある $\{x'_i\}_{i \in S}$，$\sum_{i \in S} x'_i \leq \sum_{i \in S} \omega_i$ で，全ての $i \in S$ について $x_i \precsim_i x'_i$ かつ少なくとも 1 人の $i \in S$ について $x'_i \succ_i x^i$ なるものが存在する

ということを指す．許容されたいかなる coalition によっても block (improve on) されないような資源配分を指して，（コア資源配分）core allocation と呼ぶ．コア資源配分の全体を指して（単純交換）経済のコア (core of an exchange economy) と呼ぶ．経済 $\mathcal{E}$ におけるコア資源配分の全体を $\mathcal{C}ore(\mathcal{E})$ で表す．

[52]協力ゲーム理論は数学的な発展，特に測度理論を用いて Player の集合を測度空間とした設定の下，すでに１９６０年代において著しい発展を遂げた分野である．

このコア概念は上の 8.1.1 節におけるコア概念とは異なる．先のものは 1 つの coalition 全体で実現される値にのみ着目しており，効用値を互いにやりとり可能 (transferable utility) であるような場合であればここでの概念と一致するが，通常の経済学的設定において（合計値を一定にしたままでの）効用値のやりとりは不可能である．一般に，効用値のやりとり不可の想定の下で考えた協力ゲームの概念 games with non-transferable utilities （Non TU Games）は，coalition 全体の効用値のあり方のみを考慮した上記の協力ゲームの概念 games with transferable utilities（TU Games）と区別され，コアの意義，存在の条件なども異なったものとなる．Non TU Game の厳密な定義，コア存在条件の詳細については Ichiishi (1983)（そこでは cooperative games without side payments と述べられている）を見よ．

Theorem 8.1 $\{x_i^*\}_{i=1}^m$ が価格 p^* の下で経済 $\mathcal{E} = (X_i, \precsim_i, \omega_i)_{i=1}^m$ の競争均衡資源配分であるものとする．全ての i について x_i^* における i の選好が局所非飽和であるとき，$\{x_i^*\}_{i=1}^m \in \mathcal{Core}\mathcal{E}$.

【Core Equivalence・Core Convergence】

上の定理が主張するように，厚生経済学の第一基本定理と同様のかなり一般的な条件の下で，競争均衡資源配分はコア資源配分であることが言える．以下で扱う Core Equivalence Theorem (Core Convergence Theorem) と呼ばれるものは，経済の構成人員が十分大きな場合においていわばその逆，すなわち Core Allocation が競争均衡 Allocation である（または，ある意味で近づく）ということを主張するものである．

(1) レプリカ経済の Core Convergence Theorem: Debreu and Scarf (1963)

(2) Anderson による Core Convergence Theorem: Anderson (1978)

(3) Large Economy における Core Equivalence Theorem: Hildenbrand (1974)

8.2 非協力ゲーム理論

本節では，**非協力ゲーム** について解説する．以下で用いるいくつかの例を含めて，参考にすべき図書として Kreps (1990) を挙げておく．

協力ゲームにおいては Coalition という概念を通じ何らかの意味において安定的な資源配分（解）を分析することが目標であった．このとき我々は “許容された Coaliton のあり方” というものを前提として議論を進めた．ゲームの理論が人間の行動に対する分析であるとすれば，その出発点に「協力」という概念をもってくることは非常に自然かつ本質的であり，そうして実現し得る結果の中におそらく人間社会の最も望ましい姿も含まれているに違いない．しかしながら，今日において我々が直面するのは，そういった望ましい「協力」による解が，あくまで「個人」を出発点としたシステムとしていかに実現できるのかという問題である．“協力” ゲームは “許された協力のあり方” を前提とし，そこから “どのような結果が導かれるか” を明らかにしたが，非協力ゲームにおいては，むしろ “一人一人が独立した行動を許されている” 状態から，どのようにして “協力的な（あるいは望ましい）行動が導かれるか（導かれないか）” を問題とする．協力ゲームの主眼が “ゲームの結果 (Outcome) ” にのみ置かれているのに対して，非協力ゲームの主眼はその結果のみならず “ゲームを play する個々の主体の戦略（Strategy）のあり方” にも置かれているのはそのためである．

8.2.1 非協力ゲームの標準形（戦略形）

以下 8.2 節を通じてゲームは次のような記号をもって表現される．

(1) Players： $\{1, 2, \cdots, m\} = I$ を plyer の集合とする．

(2) Strategies for each player : 各 $i \in I$ に対して，S_i という集合が定義されているものとする．

(3) Payoffs for each player : 各 $i \in I$ に対して，もしも $(s_1, \cdots, s_m)$ という戦略の組（ただし $\forall j,\, s_j \in S_j$ である）が与えられたとき，それに応じて i の受け取る利得を決める関数 $u_i : \prod_{j \in I} S_j \to \boldsymbol{R}$ が定義されている．

このとき我々は，**標準形**（または**戦略形**）の非協力ゲームが一つ定義された，という言い方をする．

8.2.2 非協力ゲームの均衡

非協力ゲームが一つ定義されたとする．我々の第一の関心は，与えられたゲームにおいてどのような各人の戦略の組み合わせが play されるか（そしてどのような利得の組み合わせが各人に与えられるか）という問題である．この問題に対する解答を持つようなゲーム，すなわち「何らかの説得的な根拠の下で，明白な play のなされ方 (obvious way to play) 」を持つようなゲームを指して，解 (solution) のあるゲームと呼ぶ．またその時の明白な play のなされ方（すなわち戦略の組み合わせ）を指して，その**非協力ゲームの解**と呼ぶ．

全ての非協力ゲームが何らかの説得的な根拠の下で自明な play のなされ方（解）を持つわけではない．[53] また，「何らかの説得的な根拠」という言い方も，ほとんど厳密な取り扱いには馴染まない．そこで我々は，「もしも自明な play のなされ方というものがあるとして，それらは少なくともどのような条件を満たすべきであろうか」という，立場へ一歩下がることにしよう．しかも，その立場は場合によって，背後の想定によって，変わってくるかも知れない，というところまで譲歩してしまおう．そのような条件を満たす概念を我々は「解」と区別してゲームの「均衡」と呼ぶことにする．[54]

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	1, 1	0, 0
	s2	0, 0	10, 10

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	10, 0	0, 10
	s2	0, 10	10, 0

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	10, 0	0, 10
	s2	0, 10	10, 0

		Player 2					
		t1	t2-0	t2-1	t2-2	t2-3	$\cdots$
Player 1	s1	$1, 1$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$\cdots$
	s2-0	$0, 0$	$10, 10$	$9, 11$	$9, 11$	$9, 11$	$\cdots$
	s2-1	$0, 0$	$11, 9$	$9, 9$	$9, 11$	$9, 11$	$\cdots$
	s2-2	$0, 0$	$11, 9$	$11, 9$	$9, 9$	$9, 11$	$\cdots$
	s2-3	$0, 0$	$11, 9$	$11, 9$	$11, 9$	$9, 9$	$9, 11$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$11, 9$	$\ddots$

[53]実際，今から解説する Nash 均衡にしても，それはせいぜい「自明な play のなされ方というものが**もしもあるとすれば**，それが自明と呼ばれるための必要条件を与える」程度のものに過ぎない．Unique な Nash 均衡を持つゲームでありながら，obvious way to play を持つための説得的な根拠を見つけることが不可能（とおそらく万人の納得する）ゲームの例もある．(図参照)

[54]解が**存在すると仮定したら**それが満たすべき条件の候補，という話であって，**解が存在するかどうか**は別問題である．すなわち，均衡が存在しても解が存在するとは限らない．(前注 53 参照.)

非協力ゲームにおける均衡は，player 達の戦略の組 $(s_1, \cdots, s_m), s_1 \in S_1, \cdots, s_m \in S_m$ という形で表される．非協力ゲームの均衡概念として最も基本的なものは Nash 均衡概念と呼ばれるもので，これは通常我々が注目する中では最も緩やかな意味で安定的（自明な play のなされ方というものがあるとすれば，おそらくそれくらいのことは当然満たされていて欲しいという意味で）な player 達の戦略の組み合わせである．非協力ゲーム理論において Nash 均衡が最も基本的かつ重要な概念であることは議論をまたないが，ここではその議論に入る前に，もっと強い意味で安定的な player 戦略の組み合わせが存在する場合を見ておくことにしよう．

各 player i が strategy set S_i の中から最適な戦略を選択するにあたって，通常前提とされる決まり文句が一つある．それは，

> 【前提：共通認識】“全ての player は，全ての player の戦略集合，利得関数，ならびにそれらの下での全ての player の合理性，を共通認識 (Common Knowledge) として持っている”

という言い回しである．

ここで非常に重要な注意すべき点が存在している．“戦略集合” と “利得関数” が共通認識というのはいいとして，“合理性” についての共通認識とはどういうことであろうか．我々は絶対的な “合理性” の何たるかについて，すでに説明を不要とするほどの何かを得ているとでもいうのだろうか．実際ここで想定されていることは，むしろ逆である．我々は人間の合理性といったものについての満足のいく叙述をむしろ断念すべきなのであり，従って合理性の共通認識ということもまた合理性の何たるかを白紙にして空けておきながら，そこに場合に応じて適切に形式化された概念を放り込む以外に無い．

以下では「各 player の合理性」という概念を

> 「各 player 1 つずつ持っている形式化された戦略決定の根拠」

というところまで限定してしまおう．そして，各人が持っているそういった 1 つひとつの根拠（論理式によってきちんと形式化された理屈と，その下での選択された戦略）が，**全ての Player にとって互いに利用可能な情報である**ということでもって，厳密な意味での**合理性の共通認識**と呼ぶことにする．

このような共通認識に関する前提に基づいて，以下で問題とすべき「均衡」概念もまた，**そのような合理性の共通認識の下で，各人において選択された戦略が影響を受けないようなもの**ということに限定しよう．後に述べる Nash 均衡は，そのような概念の代表例である．[55] Nash 均衡の定義を与える前に考察しようというのは，この “合理性についての Common Knowledge” という視点を守りながら，Nash 均衡よりももっと強い意味で安定的な均衡の概念である．それは “Strict Dominance” という概念および，その連続的な使用 (Iterated Dominance) から導かれる，player 達の戦略の組み合わせである．

【Strict Dominance Solvable Games】

非協力ゲームが次の標準形で与えられているものとする．

[55] 上で述べた「合理性の共通認識」は「選択された戦略の限定」を前提としている点が，通常言われている概念と異なっており，それが通常言われている定義問題を簡単にしている．ここで，通常の “合理性についての共通認識” と言われるものについて説明しておく．例えば，player 1 と player 2 からなるゲームにおいて，player 1 はわざわざ自ら損をするような戦略を選ぶ事はない.（これが player 1 の合理性.）そのことが共通認識となっているとはすなわち，player 2 が “player 1 は自ら損をするような戦略を取らない” と認識していることを意味する.（これは player 1 の合理性についての player 2 の認識.）従ってこの場合 player 2 は “player 1 が自ら損をするような戦略を取らない” と認識した上で，わざわざ自ら損をするような行動はとらない.（これは player 2 の合理性.） これがさらに共通認識になっているとは，player 1 が “player 2 は player 1 が自ら損をするような戦略を取らないと認識した上で，自ら損をするような行動は取らない” ということを認識していることを意味する.（これが player 1 の認識.）従って player 1 は，“player 2 は player 1 が自ら損をするような戦略を取らないと認識した上で，自ら損をするような行動は取らない” と認識した上で，自ら損をするような行動は取らないであろう.（これは player 1 の合理性.）さらにこれが共通認識になっているわけだから，player 2 はそのことを認識した上でなお合理的な行動を，そしてさらに player 1 は，それを認識してなお合理的な行動をとることになる．このような互いの合理性の認識に関する無限の連鎖が，合理性についての共通認識 (Common Knowledge) と通常言われているものである．実際にこのような頭の中のできごとを，各 player にとって可能な認識構造としてゲームの一部として記述することは，通常の述語論理においては不可能であり，仮にそのようなものを本当に前提としているのであれば，ゲーム理論自体はその土台をかなり困難なものの上に置いていると言わざるを得ない．

(1) Players : $\{1, 2, \cdots, m\} = I$.

(2) Strategies : 各 $i \in I$ について S_i.

(3) Payoffs : 任意の戦略の組 $(s_i \in S_i)_{i \in I}$ と，各 $i \in I$ について，$u_i(s_1, \cdots, s_m) \in \boldsymbol{R}$.

Definition 8.2 (Strictly Dominated Strategies) player i の戦略 $s_i \in S_i$ に対してある $s_i' \in S_i$ が存在して，任意の $(s_j \in S_j)_{j \in I, j \neq i}$ という i 以外の player 達の戦略の組について

$$(s_1, \cdots, s_i, \cdots, s_m) < (s_1, \cdots, s_i', \cdots, s_m)$$

となるとき，player i の戦略 s_i は s_i' によって strict に dominate される (strictly dominated) と言う.

		Player 2		
		t1	t2	t3
Player 1	s1	4, 0	1, 5	6, 4
	s2	5, 3	6, 0	−3, −1

		Player 2		
		t1	t2	t3
Player 1	s1	1, 0	2, 8	1, 3
	s2	0, 8	1, 0	100, 3.5

二つの strict dominance （連続使用を含む）で solvable な例.

Remark (Weak Dominance およびその連続的使用) : weakly dominated strategy は complete certainty によって支えられており，そのような strategy を strictly dominated strategy 同様に切り捨ててしまうことには，非常に慎重であらねばならない.

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	10, 0	3, 1
	s2	10, 10	2, 0

Strictly dominated strategy ならびにその連続的使用の下で生き残る戦略の組はもちろん非常に強い均衡概念であり，例えば単に Nash 均衡であるというよりも，より「解」と呼ばれるにふさわしいものであることは間違いないのだけれども，もしそのようなものとそうでないものが存在したとき、果たしてそれが他のものより「常に」解と呼ばれるに相応しい（絶対に play される）かと言えば、やはり慎重にならざるを得ない疑問が残る.（強いけど、所詮は「一つの根拠にすぎない」と考えるべきである.）

		囚人 2	
		not confess	confess
囚人 1	not confess	5, 5	−3, 8
	confess	8, −3	0, 0

		囚人 2	
		not confess	confess
検事の弟	not confess	10, 5	−3, 8
	confess	8, −3	0, 0

【Nash Equilibrium (単純戦略の場合)】

先にも述べたように，Nash 均衡とは player 達の戦略の組み合わせであって，ある弱い意味において，おそらく非協力ゲームで意味あるものとして通常注目される中では一番弱い—一般的な—意味において，安定的なものである．標準形ゲーム

(1) Players： $\{1, 2, \cdots, m\} = I$.

(2) Strategies： 各 $i \in I$ について S_i.

(3) Payoffs： 任意の戦略の組 $(s_i \in S_i)_{i \in I}$ と，各 $i \in I$ について，$u_i(s_1, \cdots, s_m) \in \boldsymbol{R}$.

が与えられたとき，戦略の組 $(s_1^*, \cdots, s_m^*)$ が **Nash 均衡**であるとは，任意の $i \in I$ に関して，i がその戦略を任意の $s_i \in S_i$ に代えたとしても何の利益もないことを指す．厳密に述べると，

Definition 8.3 任意の $i \in I$ に関して，$\forall s_i \in S_i$,

$$u_i(s_1^*, \cdots, s_i, \cdots, s_m^*) \leq u_i(s_1^*, \cdots, s_i^*, \cdots, s_m^*) \tag{90}$$

が成り立つとき，戦略の組 $(s_1^*, \cdots, s_m^*)$ は Nash 均衡であると呼ばれる．

【混合戦略の下での Nash 均衡】

単純戦略の下では，必ずしも Nash 均衡の存在しないゲームが存在する．しかしながら，戦略の概念を以下で述べる混合戦略に変えるならば，本節で扱う任意の標準形ゲームに対して，少なくとも一つの Nash 均衡が存在することを示すことができる．

ゲームはいままで通り

(1) Players : $I = \{1, 2, \cdots, m\}$.

(2) Strategies : S_i, $i \in I$.

(3) Payoffs : $U_i : \prod_{j \in I} S_j \to R$, $i \in I$.

によって与えられるものとする．このとき，あくまでこのゲームに基づきながら，“戦略 (S_i, $i \in I$)” という概念を “混合戦略” というものに拡張してみよう.（以下混乱を避けるため，S_i は player i の “単純戦略” の集合と呼ぶことにする.）単純戦略の集合 S_i に基づく player i の 1 つの**混合戦略**とは，S_i 上の 1 つの確率分布 σ_i を指す.（すなわち σ_i とは S_i を定義域とし閉区間 [0, 1] に値をとる関数で，$\sum_{s \in S_i} \sigma_i(s) = 1$ となるようなものである.）

以下，S_i 上の混合戦略の全体を Δ^{S_i} で表す．さてこのように “戦略” という概念を S_i から Δ^{S_i} へと拡張した以上，それにともなって player i の利得関数 u_i の方も拡張する必要が生じる．もともと $\prod_{j \in I} S_j$ 上の関数であった u_i を，$\prod_{j \in I} \Delta^{S_j}$ 上の関数 $\bar{u}_i$ として，次のように拡張する．各 $i \in I$ および各混合戦略の組 $(\sigma_1, \cdots, \sigma_m) \in \prod_{j \in I} \Delta^{S_j}$ に対して，

$$\bar{u}_i(\sigma_1, \cdots, \sigma_m) = \sum_{(s_1, \cdots, s_m) \in \prod_{j \in I} S_j} \left(\prod_{j \in I} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s_1, \cdots, s_m). \tag{91}$$

このとき**（混合戦略のもとでの）Nash 均衡**という概念は，先の単純戦略の Nash 均衡という概念における各 $i \in I$ についての S_i を Δ^{S_i} で，各 u_i を $\bar{u}_i$ で置きかえたものとして定義される．

Theorem 8.4 $S_1, \cdots, S_m$ を有限集合とするとき，混合戦略の下での Nash 均衡が少なくとも一つ存在する．

(Proof) $\Delta^{S_1}, \cdots, \Delta^{S_m}$ は全てコンパクト集合である．従ってその積 $\prod_{i \in I} \Delta^{S_i}$ もコンパクト集合．ここで，Δ^{S_i} からそれ自身への対応 Φ を

$$\Phi : (\sigma_1, \cdots, \sigma_m) \mapsto \{(\sigma'_1, \cdots, \sigma'_m) | \forall i \in I,\ \sigma'_i \text{ は } \sigma_1, \cdots, \sigma_m \text{ への best response }\}$$

とする．Maximum Theorem 等から，対応 Φ の上半連続性，凸性，非空性，およびコンパクト値であることが容易に示される．従って角谷の不動点定理から Φ は不動点 $(\sigma_1^*, \cdots, \sigma_m^*)$ を持つ．これが Nash 均衡であることは明らかである， (Q.E.D.)

8.2.3　展開形ゲーム

【展開形のゲームおよびその標準形】

次の (i) から (vii) によって規定されるゲームを，展開形のゲームと呼ぶ．

(i) player の集合 $I = \{1, 2, \cdots, m\}$．仮想的な player N (Nature).

(ii) node の有限集合 T および T 上の二項関係 $\prec$．$\prec$ は asymmetric かつ transitive であり，任意の node $x \in T$ に対して $P(x) = \{y \in T | \, y \prec x\}$ （x の predecessors の全体からなる集合と呼ぶ）は $\prec$ により totally ordered であるものとする．

(iii) $x \in T$ のうち，集合 $S(x) = \{z \in T | \, x \prec z\}$ （x の successors の全体からなる集合と呼ぶ）が空集合でないものの全体を X で表す．各 $x \in X$ について，それがどの player に属する node であるのかを決める関数 $\iota : X \to \{1, \cdots, m, N\}$.

(iv) $\forall x \in X$ に対する Available Actions を表す集合 $A(x)$.

(v) Information Sets

(vi) Terminal nodes $Z = \{t \in T | \, S(t) = \emptyset\}$ 上に与えられる，各 player への利得を表す関数 $u : Z \to \boldsymbol{R}^m$

(vii) Initial nodes $W = \{t \in T | \, P(t) = \emptyset\}$ 上への確率測度 ρ および nature に属する各 node t における $A(t)$ 上の確率測度 ρ_t.

さて，与えられた展開形のゲームに対して各 player i の単純戦略集合 S_i をうまく定義してやることによって，それと同等な標準形のゲームをつくることができる．展開形のゲームが一つ与えられておれば，その Game Tree 上の各 Information Set がどの player のものかということ，並びにその Information Set における可能な Action の全体は確定している．そこで，player i が i に属する Information Set の各々についていかなる Action をとるかについてすべて決定するということを，player i の一つの単純戦略と見なすことによって一つの標準形ゲームをつくることができる．これを，もとの展開形ゲームから得られる自然な戦略形ゲーム，と呼ぶことにする.（戦略形ゲームから逆に展開形ゲームに戻す方法は，明らかに一通りではない.）

【展開形ゲームにおける混合戦略】

展開形ゲームに置いて最も自然な意味での “混合戦略” ということを考えるならば，それは “すべての Information Set に対して，それぞれにおいて可能な行動の全体に直接確率測度を与えたもの” であろう．これを **Behaviorally Mixed Strategy** と呼ぶ．

もう一つの自然な “混合戦略” 概念として，展開形ゲームに対して自然に定まる標準形ゲームの混合戦略があげられる．これを，もとの展開形ゲームの **Normal form mixed strategy** と呼ぶ．

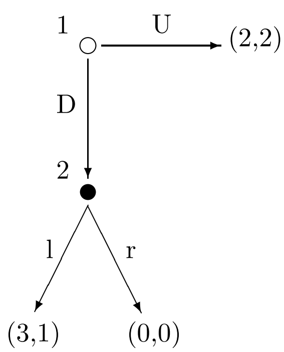
Theorem 8.5 （ Kuhn's Theorem ）Perfect Recall の仮定を満たす展開形ゲームが与えられているものとする．このとき，その展開形ゲームの自然な標準形表現の Normal form mixed strategy を一つとってきたとき，それと同値な Behaviorally mixed strategy が唯一つ存在する．逆に Behaviorally mixed strategy を一つとってきたとき，そのゲームの自然な標準形表現においてそれと同値な Normal form mixed strategy が少なくとも一つ（通常は複数）存在する．ただしここで二つの混合戦略が同値であるとは，各戦略が結果として導く結果の Distribution が等しい（他の全ての player の戦略を任意に固定したとき，自らの混合戦略の下でたどりつく最終ノードについての確率分布が等しい）ことを指す．

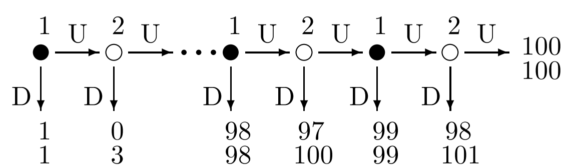
8.2.4 Nash 均衡の Refinement

以下，本節では Perfect Recall の仮定が満たされており，従って Kuhn's Theorem が成立するものとする．

【Dominance と Refinement】

Remark （Backwards Induction）





		Player 2	
		l	r
Player 1	U	2, 2	* 2, 2
	D	* 3, 1	0, 0

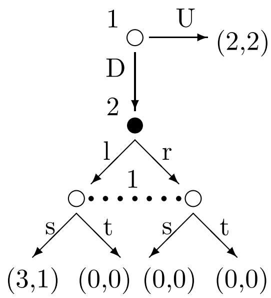
【Subgame Perfection】

一つの展開形ゲームが与えられたとき，その任意のノード s と s の successors の集合 $S(s)$ が，条件 “ s を含む informationset は $\{s\}$ であり，任意の $t \in S(s)$ について，t を含む information set は $S(s)$ の部分集合である” を満たすならば，s を initial node とし，$\{s\} \cup S(s)$ を node の全体とする新しいゲームが定義される．このゲームをもとのゲームの **proper subgame** と呼ぶ．このとき，もとの展開形ゲームの Behaviorally Mixed Strategy を，proper subgeme の戦略と見なすことができる．もとのゲームの Nash 均衡が，任意の

proper subgame に対してその Nash 均衡を与えるとき，そのような Nash 均衡は **Subgame Perfect** な Nash 均衡であると言われる．

【Sequential Equilibrium】

s を initial node とする subgame という概念において，“s を含む information set は $\{s\}$ であり，任意の $t \in S(s)$ について，t を含む information set は $S(s)$ の部分集合である” という条件が満たされないならば，subgame は game としてきちんと定義できない．たとえば subgame の始点にあたる s を含む information set が $\{s\}$ でなかったとすれば，game の出発点が定義されない．また, いずれかの player の information set



		Player 2	
		l	r
Player 1	U	$2,2$	^{*2,2}
	Ds	$3,1$	$0,0$
	Dt	$0,0$	$0,0$

が，s の successors とそうでないところとにまたがることも有り得る（perfect recall であれば，少なくとも initial node s に対する player （ $=\iota(s)$ ）について，そのような事態は生じないが）．そのような場合にも適用できるように Subgame Perfect Equilibrium の概念を自然に拡張したものが Sequential Equilibrium である．Sequential Equilibrium は展開形ゲームの Nash 均衡に対する Refinement 概念であり，Sequential Rationality および Consistent Beliefs という 2 つの概念を用いて定義される．

（Sequential Rationality）

まず我々は，各主体が各々の information set 上に与える確率分布（System of Beliefs）に着目しよう．すべての Decision node に対して 0 以上 1 以下の数字を与える **System of Beliefs** と呼ばれる関数 $\mu : X \to [0,1]$ を考える．この μ は，すべての Information set h に対して，$\forall t \in h$, $\sum_{t\in h} \mu(t) = 1$ となるようなものとする．すなわち μ は，各 Information Set において，各 player が “一応その Information Set にたどり着いたと仮定” する場合に，果たしてどの node にいるかについて，各自の予想（信念）のリストを表すものと考えることができる．この System of Beliefs が与えられれば，我々は任意の Information set h に対して（Subgame の場合，任意の Subgame に対して，自らの戦略が他者の戦略に対する Best Response であったことを確認したのと同様に）そこから先の行動の合理性を問う事ができる．すなわち，

> 戦略の組 $\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^m)$（ここで，$\pi^i$ は player i の behaviorally mixed strategy を表すものとする）を与えられたものとする．System of Beliefs $\mu : X \to [0,1]$ を与えられたものとする．h を任意の Information Set とし，$i = \iota(h)$ とする．h に属する node または h に属する node の successor となる node の全体を T_h で表す．このとき，
>
> - h に属する各 node に対して，μ から与えられる自分自身（ $=i$ ）の Belief を与える，
> - T_h に属する他者（ $\neq i$ ）の node の全てに対して，$\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^m)$ から導かれる他者の戦略 π^j, $j \neq i$ を固定する，
>
> ことによって,（即ち player i にとって μ に現れる i 以外の belief は意味を持たない,）自らの戦略 π^i が他者の戦略 π^j, $j \neq i$ への Best Response となっているかどうか,

を問う事ができる．任意の h について上のことが（ Best Response であるということが）成立するとき，戦略の組 π は System of beliefs μ の下で，sequentially rational であるという．

（ System of Beliefs の Consistency ）

上に挙げたような System of Beliefs として，我々はどのようなものを許容すべきであろうか．我々は少なくとも以下に述べる consistency という概念が満たされていることを要求する．Behaviorally Strictly Mixed Strategy Profile π_1（全ての player の全ての information set における戦略のリストで，各 information set における全ての単純戦略に 0 でない確立を与えたもの）を任意に一つ固定する．このとき任意の node t に対して，t にたどり着く確率 $p_1(t)$ が正の値として計算される．各 Information set h 上の node について，その Information Set にたどり着いたとしたときの条件付確率は，

$$\forall \hat{t} \in h,\ \frac{p_1(\hat{t})}{\sum_{t \in h} p_1(t)}$$

によって与えられる．これを $\mu_1(\hat{t})$ とおき，μ_1 を **Strictly mixed strategy profile** π_1 **から自然に導かれる System of Beliefs** と呼ぶ．一般に，Behaviorally mixed strategy profile π と任意の Belief μ に対して，π と μ が **consistent** であるとは，π および μ が strictly mixed strategy profile の列 $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ およびそれらから自然に導かれる Beliefs の列 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ によって，

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n$$
$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$$

とできることを言う．

（Sequential Equilibrium）

Definition 8.6 **(Sequential Equilibrium)** 戦略の組 π に対して，π と consistent な System of Beliefs μ が少なくとも一つ存在し，その下で π が sequentially rational となるとき，(π, μ) を sequential equilibrium と呼ぶ．

【Trembling-hand Perfection】

一つの展開形ゲームに対して，その Agent normal form というものを定義しよう．与えられたゲームの互いに異なる Information set $h \in H$ に対して，互いに異なる Agent $i_h, h \in H$ を割り当てた新しいゲームを考える．この新しいゲームの各 player i_h の利得は，もとのゲームにおける information set h の所有者の利得として定めるものとする．(明らかに新しいゲームにおける各 player の strategy を一つ定めると，そこから一意的にもとのゲームの strategy profile が一つ定まる.）このように定義された新しいゲームの標準形表現を，もとのゲームの Agent normal form と呼ぶ．

Agent normal form のゲームは標準形のゲームであるから，混合戦略のもとでの Nash 均衡が必ず存在する．Agent normal form における strategy profile を，一般に $\sigma = (\sigma_h)_{h \in H}$ という形で表しよう．ここで H は player 全体の集合（即ち，もとのゲームの Information set 全体の集合）である．Behaviorally mixed strategy の場合と同じく，normal form の mixed strategy に対しても **strictly mixed strategy** ならびに **strictly mixed strategy profile** 等の概念が全く同様に定義される．

Definition 8.7 Nash 均衡 σ が **(trembling-hand) perfect** であるとは，ある strictly mixed strategy の列 $\{\sigma^n = (\sigma_h^n)_{h \in H}\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\lim_n \sigma^n = \sigma$ なるものが存在して，任意の n と任意の $h \in H$ について，σ_h が $(\sigma_i^n)_{i \in H, i \neq h}$ に対する最適戦略 (Best response) になっていることをいう．[56]

[56] σ_h^n ではなく，σ_h が Best responce である点に注意せよ．

8.2.5 Repeated Game

戦略形のゲーム $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ を考える．G の（割引率 δ の下での無限回）繰り返しゲーム G^* を次のように定義する．(以下で，$t = 0, 1, 2, \cdots$ によって繰り返しの各 stage をカウントしているのだと読めば，分かりやすい．)

(G^* の players) $i \in I$

(G^* における単純戦略) $s_i = (s_i(t) : (\prod_{j \in I} S_j)^t \to S_i)_{t=0}^{\infty}$.[57]

(G^* における利得) 単純戦略 $(s_j)_{j \in I}$ が出揃っているものとする．$\pi(0) := ((s_j(0)(\emptyset))_{j \in I})$ と定義する．また $t = 1, 2, \cdots$, について帰納的に $\pi(t) := ((s_j(t)(\pi(0), \cdots, \pi(t-1)))_{j \in I})$ と定義する．このとき，単純戦略 $(s_j)_{j \in I}$ が出揃った下での player i の利得は，$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i(\pi(t))$ と定義する．ここで δ は割引率であり，$0 < \delta < 1$.

ゲーム G^* における Nash 均衡について，次のことが知られている．

Theorem 8.8 （ Folk Theorem ）Game G を stage game とする無限回くり返しゲーム G^* を考える．各 player i について，

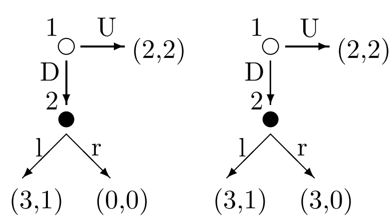
$$\bar{v}_i = \min_{j \neq i, \hat{t}_j \in \hat{S}_j} \max_{t_i \in S_i} u_i(\hat{t}_j; t_i)$$

とする.[58] このとき，割引率が十分 1 に近ければ，各 i について $\bar{v}_i$ 以上の利得を与える実現可能な状態はすべて G^* の Nash 均衡であることが言える．

8.2.6 Games of Incomplete Information

展開形ゲームにおいて，各 information set が single node からなるとき，これを完全情報のゲーム (Games of Perfect Information)，そうでないとき不完全情報のゲーム (Games of Imperfect Information) と呼ぶ．

本節の最初に【前提：共通認識】として述べたように，戦略形ゲーム $G = (I, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ を考えるとき，各 player $i \in I$ は自分のみならず，他の全ての player の character （特に I, S_j, u_j, $j \neq i$ を指す．他者の "合理性" についてまで言及することは，ここでは「選択された戦略」まで含めて「均衡」を語る場合に限定することにしよう）を明確に知り得ている—情報として利用できる—ことが前提となる．これに対して，Player の集合，戦略の集合，利得関数，という明らかに明示的なゲームの基本構造の中に，共通認識でない部分を含むような設定を持つゲームを指して，非完備情報のゲーム (Games of Incomplete Information) と呼ぶ．



[57] ここで $(\prod_{j \in I} S_j)^t$ は集合 $\prod_{j \in I} S_j$ の t 回の product を表す．ただし $t = 0$ のときは $\{\emptyset\}$ を表す．公理的集合論の立場からすると，集合 A に対して，$A^0 = \{\emptyset\}$ である．なぜなら $0 = \emptyset$ であり，定義域を $\emptyset$ とする関数は empty function $\emptyset$ のみであるから，$A^0 = \{\emptyset\}$. もちろん $0 = \emptyset$ だからこれを $\{0\}$ と書いても良い．ちなみに $\{0\} = 1$ であるから，この記述方法は通常のべき乗の慣習とも整合的である．

[58] ここで u_i は G ではなく G^* のもの（期待値をとったもの）である．その引き数に t_i が入っているが，正確にはこれは $t_i \in S_i$ に 1 を与える確率測度を表している．

非完備情報の設定下では，各 player のゲーム基本設定に対する認識がそもそも異なるので，各 player は他者がゲームをどう見ているかについての（１つの主観に基づく）想定から出発しなければならない．ところがそういった想定は，なされると同時にその主体のみが知り得る情報となってしまうので，結局その想定に対してのまたまた他者の想定を，さらにその他者の想定に対する想定を，という形の（ゲームの設定記述のための）無限連鎖が生じてしまう．[59] そこで先に "合理性の共通認識" を述べたときと同じ方法で，このようなゲームの均衡概念を確立すること，そのための各人の想定のあり方，ということに専念してみよう．すなわち：

> 【世界観想定をともなうゲームの均衡】各人の世界観についての想定とその下で選択された戦略の組を並べたものであって，仮にそれらが全ての主体にとって相互に利用可能な情報となった場合においても，各人の想定と戦略の選択が何ら影響を受けないようなもの

を指して，このようなゲームの均衡概念と考えるという立場である．そのような概念は（完備な場合のゲームの Nash 均衡概念と同様）もちろん唯一では無い．

非常に良く用いられる上記の概念の特殊ケースが存在する．それは,「世界観が共有できない」という問題を，便宜的に「世界観が共有できてないことを表現した 1 つの世界観が共有できている」という完備（不完全）情報のゲームに置き換えてしまい，その Nash 均衡概念を用いるという方法である．この置き換えられたタイプのゲームは **Bayesian Game** と呼ばれ，その Nash 均衡は **Bayesian Nash Equilibrium** と呼ばれる．以下にその詳細を述べる．

各 player の利得関数 u_i は，実際は各人の character $\theta_i \in \Theta_i$ というものに依存した，

$$u_i(\cdot,\theta_i) : \prod_{i\in I} S_i \to R$$

という形をしており，各 player はそれぞれ自分の character については知っているものの，他の player の character についてはよく知らないところがある，という不完備情報ゲームを考えよう．以下，各 $i \in I$ について player i の character は Θ_i という集合の要素として表現されているものとする．

さて，この非完備情報ゲームに対して 2 段階の展開形ゲームを考え，最初の node を Nature が各人の character を決定するためにさいころを振る node であるとみなした不完全情報ゲームにしてしまおう．各人は自己の character について 2 段階目で知ることになるが，他者の chatacter については知り得ないものとし，**Nature のふるさいころの目の出方は，$\Theta = \prod_{i\in I}\Theta_i$ として，Θ 上の確率分布 ν として，全ての player の共通認識になっている**ものとする．形式的に述べると，元の非完備情報のゲームを，不完全情報のゲーム $\tilde{G} = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}, \Theta, \nu)$ に変換する．ここで各 u_i は先に述べた $\prod_{i\in I} S_i \times \Theta_i$ 上の実数値関数である（$\prod_{i\in I} S_i$ 上のではない点に注意）．この不完全情報のゲームにおける $i \in I$ の単純戦略は，Θ_i 上の関数 $s : \Theta_i \to S_i$ である．全ての player の戦略が $(s_i)_{i\in I}$ と出揃えば，player i の利得は，

$$\int_\Theta u_i((s(\theta_j))_{j\in I}, \theta_i)\, d\nu((\theta_j)_{j\in I})$$

と表される．このようにして非完備情報の問題を不完全情報のゲームに帰着させたものが往々にしてそのまま非完備情報のゲーム (Games of Incomplete Information) と呼ばれることもある．

この立場の最大の問題点は，お互いに独自の個人情報を持ち得ている主体というのが出発点でありながら，そういった主体間で，なぜ各自の特性に関する事前確率 ν を共通認識として持ち得るのか，そこに何の根拠も正当性も持たないという点である．各人が世界についてどのような想定を持つかということは，今のところ個人情報を持つ各人の頭の中にのみ属する問題である．出発点は，個人情報のみを持った各 player であって，

[59]実は先に述べた通り，そういった連鎖は完備な設定であっても「合理性の共通認識」の中で相手の合理性に対する認識の内に，すでになされておらねばならないのだが，通常完備な設定の下でのその問題にはあまり触れられないで，このような非完備情報ゲームの下ではじめて主観に基づく想定とその共通認識の問題としてとり扱われる．

各人の想定は自らの世界についての信念なのである．自らの信念と他者の信念（異なるとすれば）を並列して，それらの間に各人が他者と共通の事前確率を置くというのは，そもそもの各自の信念が世界観についての自らのまさしく信念であったということが事実なのであれば，まさしくそこからの「世界観についての信念の鞍替え」を暗黙的に要請している．

非完備情報の問題を Bayesian Nash 均衡としてとらえるという発想が，それに必要な事前確率を（例えば意識改革，教育，宗教，洗脳を通じて）みんなで共有しましょう，という一つのかけ声であり思想であるのだとすれば，はっきりとそのように述べるべきである．

8.3 補論 1 ：非協力ゲームと一般均衡理論

ここでは Abstract Economy と呼ばれるゲーム論的に抽象化された経済モデルについて解説する．一般均衡の存在問題，条件等がこの抽象度で議論されることも多い．

8.3.1 Abstract Economy

抽象経済とは，通常の戦略形の非協力ゲームを次のような形に一般化したものをさす．

Player の集合：$I = \{1, 2, \cdots, k\}$,

戦略集合：S_i, $i \in I = \{1, 2, \cdots, k\}$,

制約対応：$A_i : \prod_{i\in I} S_i \ni (s_1, \cdots, s_k) \to A_i(s_1, \cdots, s_k) \subset S_i$, $i \in I$,

利得：$v_i : \prod_{i\in I} S_i \to R$, $i \in I$.

抽象経済の均衡（拡張された意味での Nash 均衡）とは，players の戦略の組 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_k^*)$ で，

(i) 全ての i について，$s_i^* \in A_i(s^*)$,

(ii) 全ての i について，$v_i(s_1^*, \cdots, s_k^*) \geq v_i(s_1^*, \cdots, s_i, \cdots, s_k^*)$, $\forall s_i \in A_i(s^*)$,

を満たすようなものを言う．（通常の非協力ゲームの戦略形およびその Nash 均衡は，上で定義した抽象経済において，全ての i について $A_i(s_1, \cdots, s_k)$ が常に S_i に等しいとした特殊ケースであることに注意せよ．）抽象経済の均衡の存在は，Debreu (1952) あるいは Shafer and H.F.Sonnenschein (1975) 等によって，非常に一般的な条件の下で証明されている．

静学的一般均衡理論における経済 $\mathcal{E} = ((X_i, u_i, \omega_i, (\theta_{ij})_{j\in J})_{i\in I}, (Y_j)_{j\in J})$ を，上で定義した抽象経済（あくまで "拡張された意味での" 非協力ゲームである）として次のように解釈する．

players	消費主体 $i = 1, \cdots, m$	生産主体 $j = 1, \cdots, n$	競売人 N
戦略集合	$X_i \subset R^\ell$	$Y_j \subset R^\ell$	$\Delta^{\ell-1}$
制約	$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p \cdot y_j$	Y_j	$\Delta^{\ell-1}$
利得	$u_i(x_i)$	$p \cdot y_j$	$p \cdot z$

（上で Δ は $\ell - 1$ 次元の unit simplex を表す．もちろん ω_i は消費主体 i の初期保有を，θ_{ij} は消費主体 i の生産主体 j に対する share holding を表す．また z は $\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m \omega_i - \sum_{j=1}^n y_j$ を表す．）

抽象経済をこのように解釈できること，ならびにそう解釈したときの均衡（それは上のような拡張されたゲームの上での Nash 均衡の拡張概念として定義されている）$(x_1^*, \cdots, x_m^*, y_1^*, \cdots, y_n^*, p^*)$ の存在が言えているとして，それが経済学的一般均衡であることを示そう．

抽象経済の均衡解 $(x_1^*, \cdots, x_m^*, y_1^*, \cdots, y_n^*, p^*)$ は拡張された意味での Nash 解の性質 (i), (ii) によって，

(1) 全ての player について，自らの選んだ戦略は，他の player 達の戦略を所与とした場合の制約条件付き Best Response になっている，

という性質を持っている．このとき，

(2) そのことから，経済学的一般均衡の定義である三つの条件，**(a)** 価格を所与とした，各消費主体の効用最大化，**(b)** 価格を所与とした，各生産主体の利潤最大化，**(c)** 超過需要 ≤ 0，を全て導き出せる，

ことが言えればよい．上の **(1)** は，各 i について x_i^* が $y_1^*, \cdots, y_n^*, p^*$ を所与としたときの best response であることを意味する．戦略制約が経済学的に言うところの予算制約に全く等しいことを考慮すれば，直ちに **(a)** が従う．さらに上の **(1)** は，各 j について y_j^* が p^* を所与としたときの best response であることを意味するから，**(b)** も直ちに従う．よって以下 **(c)** の成り立つことを示せば十分である．

全ての i について，x_i^* は戦略制約であるところの

$$p \cdot x_i^* \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$$

という式を満たすはずであるから，これを全ての i について足しあわせて

$$p^* \cdot z^* \leq 0$$

を得る．（ここで，z^* は $\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{i=1}^m \omega_i - \sum_{j=1}^n y_j^*$ を表す．）一方で，p^* は $(x_1^*, \cdots, x_m^*, y_1^*, \cdots, y_n^*)$ に対する best response であるから，z^* を最大評価しているはずであり，

$$\forall p \in \Delta,\, p \cdot z^* \leq p^* \cdot z^* \leq 0$$

を得る．最後の式の p として $(1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 1)$ を代入すれば，$z^* \leq 0$, すなわち **(c)** の成立することが言える．

8.4　補論２：寡占市場を含む一般均衡

部分均衡理論における独占均衡や，寡占のクールノー均衡のような考え方を一般均衡理論の枠組の中に取り入れた均衡の存在についての議論は，かなり古くから行われている．1970 年代の Negishi にはじまる「主観的な需要関数予想」を出発点としたアプローチがその典型である．簡単に述べると，あらかじめ定められたいくつかの市場（寡占市場）においては，各生産主体が「その市場の価格と需要量についての主観的予想」と,「他の全ての生産主体の生産量」を所与として，自らの利益が最大になるような生産計画を立てる．つまり，各生産主体の行動が単なる価格を所与とする利潤最大化ではなく，価格と他の主体の行動（ならびにその主体の主観的需要予想）に依存する形の最大化として定式化される．

このアプローチに特有の問題として，まず企業の利潤関数に凸性の仮定を設けねばならなくなってくるということがある.（これは完全に数学的な技術上の問題であって，何ら正当化をともなうものではない.）さらに，この「主観的」な需要関数予想を，当該モデルにおける「客観的」なものにできないかという objective demand function 問題というのがある．これらは今日でも未解決の問題として知られており，特に後者の問題は,「企業の目的」というもう一つの大きな問題と関連を持って，経済学理論上最も困難な問題に位置するものである．

REFERENCES

Anderson, R. (1978): “An elementary core equivalence theorem,” *Econometrica 46*(6), 1483–1487.

Debreu, G. (1952): "A social equilibrium existence theorem," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. 38*, 886–893. Reprinted as Chapter 2 in G. Debreu, *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Debreu, G. and Scarf, H. (1963): "A limit theorem on the core of an economy," *International Economic Review 4*, 235–246. Reprinted in G. Debreu, *Mathematical Economics*, pp. 151-162. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Hildenbrand, W. (1974): *Core and Equilibria of a Large Economy.* Princeton University Press, Princeton.

Ichiishi, T. (1983): *Game Theory for Economic Analysis.* Academic Press, New York.

Kreps, D. M. (1990): *A Course in Microeconomic Theory.* Princeton University Press, New Jersey.

Shafer, W. and H.F.Sonnenschein, (1975): "Equilibrium in abstract economies without ordered preferences," *Journal of Mathematical Economics 2*, 345–348.

Von Neumann, J. and Morgenstern, O. ((1944, 1947, 1953)): *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton.

【ゲーム理論の問題】

Exercise 8.1 （$\star$）Kreps の教科書にある Divide the cities および Divide the letters という二つのゲームについて，それらの違いを述べなさい．またこの二つのゲームを例に出すことによって Kreps は何を言いたかったのか，論じなさい．

(解答) 二つのゲームは共に数百個の Nash 解を持ち，一見したところ obvious way to play が存在しないように見える．それにもかかわらず，実際には比較的高い確率で，それぞれ異なる Nash 解が play される．それは前者においては都市名の分類，後者においては文字の分類，という作業が，それぞれ地理的配置，辞書的順序，という異なる focal principle と結び付くためである．

おそらく Kreps は，構造上は本質的な差異の無い二つのゲームにおいて，ゲームの形式的設定の中には現れない要因，例えば players の米国の地理に関する知識とか alphabet に関する常識とかいったもの，が focal point を，ひいては obvious way to play を左右する可能性について指摘したかったのであろう．

Exercise 8.2 Kreps の教科書 14 章本文および脚注 (c) を読み，本文中で示される Repeated Game の解がなぜ subgame perfect でないか，それをどのように変更すれば subgame perfect な解になるか，説明せよ．

(解答) 本文中の各 player の repeated game における戦略は次のようなものである．

本文中の player 1 の戦略： player 1 は相手が過去に非協力的行動 $t2$ をとらない限り協力的行動 $s1$ をとる．ただし相手が一度でも非協力的行動 $t2$ をとったならば，その後は非協力的行動 $s2$ をとり続ける．

本文中の player 2 の戦略： player 2 は相手が過去に非協力的行動 $s2$ をとらない限り協力的行動 $t1$ をとる．ただし相手が一度でも非協力的行動 $s2$ をとったならば，その後は非協力的行動 $t2$ をとり続ける．

これが Repeated Game における Nash 解であることは，本文に述べられた通りである．これらの戦略に従えば，一番最初は（過去に非協力的行動がとられてないのは明らかなので）協力的行動の組 $(s1,t1)$ がとられ，以後両 player は手のすべらない限り協力的行動の組 $(s1, t1)$ をとり続けることになる．ただしこの均衡は subgame perfect ではない．実際，player 2 の手がすべって $(s1,t2)$ という行動の組が現れた，その次の node からはじまるこのゲームの subgame を考えてみよう．上の戦略に従えば，player 1 の戦略は非協力的行動 $s2$ をとり続けるというものになる．一方で player 2 は，（手がすべったのは自分であり，過去に player 1 の裏切りはないので）上の戦略を適用する限り，ともかく最初は $t1$ をとることになる．これは $s2$ をとり続けるという player 1 の subgame における戦略を所与とした場合の Best Response ではない．（player 2 にとっては，その node から先全て $t2$ をとり続けるという戦略の方が，より高い total 利得を実現する．）

脚注において修正された戦略は次のようなものである．

修正された player 1 の戦略： player 1 は相手が過去に非協力的行動 $t2$ をとらない限り協力的行動 $s1$ をとる．ただし自分または相手が一度でも非協力的行動 $s2$ あるいは $t2$ をとったとすれば，その後は非協力的行動 $s2$ をとり続ける．

修正された player 2 の戦略： player 2 は相手が過去に非協力的行動 $s2$ をとらない限り協力的行動 $t1$ をとる．ただし自分または相手が一度でも非協力的行動 $t2$ あるいは $s2$ をとったとすれば，その後は非協力的行動 $t2$ をとり続ける．

上記の修正された戦略においても，両 player は（手がすべらない限りは）協力的行動の組 $(s1,t1)$ をとり続けることになり，ともに相手の戦略を所与とした場合に，自らの戦略を変更することで total の利得を増加させ得

ない（もちろん将来に対する割引率に多少の制約は必要となるが）ことは，本文で解説された先の場合と全く同様に示すことができる．また，一方が手をすべらせて非協力的行動をとってしまったあとの任意の subgame を考えた場合には，両者ともに非協力的行動 $s2$ または $t2$ をとり続けるという戦略になるので，互いが互いの戦略を所与としたときの Best Response になっている．互いに協力的行動がとり続けられている場合の任意の node から先の subgame はもとの game と何等変わらないから，そのような subgame で互いが互いの Best Response をとっていることは，もとの game で上記の戦略が Nash 解であることと全く同様の理由でもって保証される．よって上記の修正された戦略の組は subgame perfect な Nash 解となる．

Exercise 8.3 （$\star\star$）2 人 2 財の単純交換経済 $\mathcal{E} = \{(X_i, \precsim_i, \omega_i)_{i=1,2}\}$, $X_i = R_+^2$ における下図のような資源配分 $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ について，その n 回レプリカ資源配分がその n 回レプリカ経済の Core に入らないような n に関する十分条件を，理由とともに一つ挙げなさい．