5 選好と消費

消費をおこなう主体として我々がとらえようとするものは現実の世界における個人そのものであり，そして個人（消費主体）は対象物の全体としての商品空間上に「選好」を持つものとして以下では表現される．選好は個人を特徴付ける最も基礎的な特性として扱われ，人間意識のそれ以上の深層に触れることなく必要な話を展開するための有用なブラックボックスと言える．

経済学理論の立場は，人間社会を「ある意味で合理的」なしくみとして捉えることである.「ある意味」と述べたのは，まさに第１章で述べたような議論を受けてのことであり，おそらく我々は「いかなる意味においても」合理的な人間社会像というべきものの完成物を手に入れることはないであろうという事実を踏まえてのことである．[27] 消費主体（人間）を以下で述べるように描くということは（第２章の date-event 型商品概念に見た uncertainty 問題の確率論的 risk 問題への，ならびにその確率的議論が個人の選好に帰着されたことに代表されるように）人の「思考」をある一定の深まりの段階で切り取って描くということである。ある意味での合理性というのはまさにそういう一段階ということである．「唯一絶対の合理性」というようなものの何たるかということをもとめる試みが前世紀に否定されたのは，まさしくその「思考の深まり」に限界が無いということから来るものである．

それでは，経済学においてそういった人間についての合理的な把握は諦めるべきかというと，そうはならないように思われる．社会に関する学問において，人間の把握はそのまま我々が社会とは何であるかを規定する一つの社会に向けた指針でもある．仮に人間という言葉が我々の社会把握に真の「思考停止」をもたらすなら，そういう思考の停止した人間を完全に描くことは逆に可能であり，場合によっては洗脳，操作することさえ可能である.「思考を深める」ところにこそ人間の人間たるゆえんがあるのであって，そして「学問」にはそれを言語的・論理的に押し進めなければならない責任と限界がある．

5.1 選好と効用関数

まず最初に，消費主体の記述に置いて必要不可欠な道具である順序 ordering（前順序 preordering）という数学概念の説明を与える．

X を集合とする．X 上に定義された２項関係 $\precsim$ が以下の条件を満たすとき，$\precsim$ を X **上の前順序 (preordering)** と呼ぶ.

（反射性：reflexivity） 任意の $x \in X$ について，$x \precsim x$.

（推移性：transitivity） 任意の $x, y, z \in X$ について，$x \precsim y$ かつ $y \precsim z$ ならば $x \precsim z$.

さらに反対称（asymmetric）性,「$x \precsim y$ かつ $y \precsim x \Leftrightarrow x = y$」，を満たせば，これを X **上の順序 (ordering)** と呼ぶ．２項関係 $\precsim$ についての以下の条件を**完備性**と呼ぶ.

（完備性：completeness） 任意の $x, y \in X$ について，$x \precsim y$ または $y \precsim x$.

順序が完備であるとき，これを**全順序 (total ordering)** と呼ぶ.

[27] しかしそのことが「合理的でない個人」をハトやサル同様に実験し観察するといった手法を正当化するものでないことには，注意が必要である．そもそも,「知性」とは何であるかという定義に対する哲学的立場として我々は「行動」にのみ着目すべきであり，知性の何たるかについての議論に惑わされるべきでないといったスローガンはそれなりの意義があり得るものの，学問の方法論として我々がそこから得るものはほとんど無いと言うべきである．そこに見られる「科学性」への執着は非常に素朴な実証主義，経験主義への回帰に他ならなず，ハト・サルの習性ごとき「客観」世界を人間記述に求めようとすることには（そこにいくらかの実用主義的粉飾が施されたとしても）何の変わりもないのである．

消費主体 i の行動（すなわち消費）は，商品空間 R^ℓ の部分集合 X_i の一点として表現される．X_i はこの消費主体にとって可能な消費行動の全体を表現しており，消費集合と呼ばれる．消費主体 i は, その消費集合 X_i 上の２点 x, y に対して,「x よりも y の方が好ましいか，または無差別である」ということを「$x \precsim_i y$」で表現する**選好** （と呼ばれる２項関係）$\precsim_i$ を持つものとし，これは通常，消費集合 X_i 上に定義された完備な前順序であるものと仮定される．[28]完備性と前順序性を合わせ持った選好は，しばしば**合理的な選好**と呼ばれる．完備性や前順序性を仮定しない選好はしばしば non-ordered（非順序的）と呼ばれるが，実際にはそれらを仮定せず，より一般的な議論をしようということであるから，むしろ「一般的選好」とでも言うべきである．一般的選好よりも合理的選好に多くの研究者が固執するのは，それが後で見るように，結局は効用関数を用いた議論に帰着するからという，ただそれだけの理由にすぎない．

※ 一般的選好の例：たとえば「今以上に多ければいい」しか頭に無いとき．

$\precsim_i$ を X_i 上の合理的な選好とする．このとき $x \precsim_i y$ かつ $y \precsim_i x$ であることを $x \sim_i y$ と書き,「x と y は無差別である」ということを表すものとする．また，$x \precsim_i y$ かつ $\neg(y \precsim_i x)$ であることを $x \prec_i y$ と書き,「x よりも y が好ましい」ことを表すものとする．明らかに $\prec_i$ は irreflexive（$\forall x \in X_i, \neg(x \prec_i x)$）かつ transitive, $\sim_i$ は reflexive, transitive, symmetric な X_i 上の２項関係となる（練習問題）．$\precsim_i$ が完備な前順序であれば，任意の $x, y \in X_i$ に対して必ず $x \prec_i y$, $x \sim_i y$, $y \prec_i x$ のいずれか一つだけが成り立つ（練習問題）．

X を前順序 $\precsim$ の入った集合とする．X の部分集合 A が**上に（下に）有界**であるとは，ある $b \in X$ が存在して $\forall x \in A, x \precsim b$ （$b \precsim x$）となることをいう．$x^* \in X$ が，任意の $x \in X$ について $x^* \precsim x$ ならば $x \precsim x^*$, を満たすとき，x^* を X における **($\precsim$ についての) maximal element** と呼ぶ.（特に $\precsim$ が順序のときは，$x^* \precsim x$ ならば $x^* = x$，と言っても同じことである．(練習問題)）また $x^* \in X$ が，全ての $y \in X$ について $y \precsim x^*$ を満たすとき，x^* を X における **($\precsim$ についての) greatest element** という.（特に $\precsim$ が順序のときは，greatest element は存在するならばただ一つ，である．(練習問題)）$\precsim$ が完備であれば，これらの概念に違いは無い（練習問題）．

前順序，順序に基づく上記 maximal element の存在に関して，数学上最も深遠な命題の一つである，以下の Zorn の補題がある．

Lemma 5.1 （ Zorn's Lemma：Preordering 版）$\precsim$ を空でない集合 A 上の前順序 (preordering) とする．A の部分集合で $\precsim$ によって完備な前順序を付けられたものは必ず上に有界であるということが言えているとき，A における（ $\precsim$ についての）maximal element が存在する．

前順序 $\precsim$ に対して $\preceq$ を 「$x \preceq y \Leftrightarrow x \precsim y$ かつ $y \precsim x$ でないかもしくは $x = y$ でない」と定義すると，$\preceq$ は順序 (ordering) になる（練習問題）．このとき，上の Preordering 版 Zorn's Lemma は下の Ordering 版 Zorn's Lemma から直ちに従う（練習問題）．

Lemma 5.2 （ Zorn's Lemma：Ordering 版）$\preceq$ を空でない集合 X 上の順序 (ordering) とする．X の部分集合で $\preceq$ によって全順序の付けられたものには必ず上界が存在する，が言えているとき，X の maximal element が存在する．その maximal element は，$x \in X$ を任意に固定したとき，それに応じて x よりも $\preceq$ の意味で大きくなるようにとることができる．

（証明） 選択公理を前提とした証明のスケッチを与える．

X の部分集合全体からなる集合を $\mathcal{P}(X)$ とし，そこから空集合を取り去ったものを $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{F}$ からそれ自体への恒等関数に選択公理を適用して，$f : \mathcal{F} \ni F \mapsto f(x) \in F \in \mathcal{F}$ なる f を得る．

[28]ただし均衡の存在，厚生経済学の基本定理をはじめ多くの議論がそこまでの仮定をせずとも（直後に述べる「一般的選好」の下で）実際には成り立つことが知られている．

さらに，X の全順序部分集合の全体からなる集合 $\mathfrak{G}$ を考えると，仮定により関数 $g: \mathfrak{G} \ni G \to g(G) \in \mathfrak{F}$,（ここで $g(G)$ は G の上界全体からなる集合である）を得る．

さて，$x_1 \in X$ を任意にとって固定する．$A_1 = \{x_1\}$ とするとき，A_1 それ自体が X の totally ordered subset（全順序部分集合）である．よって，仮定によりその上界の全体からなる集合 $g(A_1)$ が存在して空でない．そこで $A_2 = A_1 \cup \{f(g(A_1))\}$ とすれば，再び A_2 は全順序集合である．このようにつくられた $\{A_1, A_2\}$ のように，$\mathfrak{F}$ の部分集合で「最初の元は A_1 で，以後その各元が直前の元に $f \circ g$ を適用して得られている（※）」という性質を持つものを「$\mathfrak{F}$ の部分集合で性質（※）を持つもの」と呼ぶとしよう．$\mathfrak{F}$ の部分集合で性質（※）を持つものの全体からなる族を $\mathcal{A} \subset \mathfrak{F}$ として，$A = \cup\mathcal{A}$ を考えると，A 自体が全順序集合であり，$f(g(A))$ が求める元であることが容易に示せる． **(Q.E.D.)**

選好の合理性は，次に見るように効用関数を用いた議論の可能性ということと深い関係がある．実際，合理的な選好は，次の選好の連続性という条件を満たすならば（あとはほぼ自然な想定の下で）連続な効用関数によって表現可能となる．

Definition 5.3 **（選好の連続性）**消費集合 X_i を持つ消費主体 i の選好を $\precsim_i$ とする．$\precsim_i$ が任意の $x \in X_i$ について $\{y | \, y \in X_i, \, y \precsim_i x\}$ is closed, かつ $\{y | \, y \in X_i, \, x \precsim_i y\}$ is closed, を満たすとき，$\precsim_i$ は連続性の条件を満たすという．

Theorem 5.4 **（連続な効用関数の存在）**連結集合 $X_i \subset \boldsymbol{R}^\ell$ 上の完備な前順序 $\precsim_i$ が連続性の条件を満たすとき，$\precsim_i$ は連続な効用関数 $u_i : X_i \to \boldsymbol{R}$ によって表現可能（$x \precsim_i y \iff u_i(x) \leq u_i(y)$）である．

証明は (Debreu, 1959; Chapter 4) を見よ．証明は長いが，用いられているのは可算性の概念と厳密な収束概念のみであり，努力次第では学部レベルの知識でも読むことができる．

5.2 消費主体の行動（一般的議論）

5.2.1 静学的理論における消費主体

生産主体について述べたのとまったく同様の意味において，静学的に論じられる消費主体の行動というものもまた単一の market において閉じた行動にほかならない．複数の market にまたがる行動記述において，(1) 主体の予想の問題と，(2) ファイナンスの問題（今期から来期にかけての資産の保有のしかた，あるいは借金のしかたの問題）が絡んでくることも同じである．しかしながら，消費主体の場合（株主への利潤の分配といったことが問題にならないだけ）生産主体よりもいくぶん (2) は単純である．また生産主体の場合，新規のプロジェクトの持つ意義が資本の蓄積といったつながりを持って未来へ向けて無限の利潤機会につながるのに比べ，個人の消費の場合は高々一人が一生の間に消費できるものの問題で終わってしまうという事から，社会的な意義も有限の話で閉じてしまう．その意味で有限の世界で閉じた静学的枠組みとの相性も，生産主体の場合より良いと言っていいかもしれない．

ここでは消費主体の行動を静学的に（日付けに依存しない、単一市場の議論として）論ずる．先の章で触れたように，市場が完備であるなら日付が入っているかどうかはどうでも良いことであるから，本章の立場はいわば「後に続く市場のことはとりあえず考慮しない」で，消費行動について考えると言った方がいいかもしれない．[29]

[29] ここでの分析手法をそのまま生かしながら，なおかつ将来（の市場）について考慮する主体の話をする最も簡単な方法は，便宜的に「貨幣（もしくは将来の市場に向けた購買力の象徴）」をここで分析される「商品」の一つであるかのように，つまり「それ自体に効用があり，消費可能である（かのごとく人々は考えており，そう扱ってもほぼ必要な結論をゆがめない）」かのごとく考える方法である．入門向けの教科書などで，そのような立場で書かれているものも多い．ここではそういった中途半端な立場はとらず，将来市場のことを扱う動学的議論は後章においてきちんと扱うことにし，ここは静学理論に徹していると考えることにする．

5.2.2　消費集合・最大化問題

消費主体 i の行動は，商品空間 R^ℓ の部分集合 X_i の一点として表現される．X_i はこの消費主体にとって可能な行動パターンの全体（これは経済学的ではなく物理的な制約として個人にあらかじめ与えられた行動制約である）を表現するもので，消費主体 i の**消費集合** と呼ばれる．労働サービスの供給は（必ずしもそうでなくてはならないことはないが）しばしば負の消費として扱われる．以下では労働サービスを負の消費として扱う．

消費主体 i は，その主体の物理的に可能な消費行動の全体 $X_i \subset R^\ell$, X_i 上の選好 $\precsim_i$（または効用関数 $u_i : X_i \to R$）, 初期保有ベクトル $\omega_i \in R^\ell$, および企業 $j = 1, 2, \cdots, n$ に対する利潤の請求権（share holdings）$\theta_{i1}, \theta_{i2}, \cdots, \theta_{in}$（$0 \leq \theta_{ij} \leq 1$, $j = 1, 2, \cdots, n$），の組

$$(X_i, \precsim_i, \omega_i, \theta_{i1}, \cdots, \theta_{in})$$

によって完全に特徴づけられるものとする．以下もしも特に断りがなければ，X_i は空でない閉集合であるものとする．

5.2.3　資産

消費主体 i が, 消費集合 $X_i \subset \boldsymbol{R}^\ell$, X_i 上の選好 $\precsim_i \subset X \times X$, 初期保有ベクトル $\omega_i \in \boldsymbol{R}^\ell$, およびテクノロジー（生産主体）$Y_1, \cdots, Y_n$ への権利を表す $(\theta_{i1}, \cdots, \theta_{in}) \in [0, 1]^n$ によって表現されているとしよう．X_i は下に有界な閉集合であり，$\precsim_i$ は X_i 上の前順序とする．さらに $\precsim_i$ は $X \times X$ の閉集合（選好の連続性）と仮定する．[30]

さて，Δ を $\boldsymbol{R}^\ell$ の部分集合とし，全てのテクノロジー（生産主体）Y_j について，利潤関数 π_j が Δ 上で定義されているものとしよう．このとき消費主体 i の所得（静学的な立場にあることを考慮すれば，資産と呼ぶ方がより適切である）は，$p \in \Delta$ に対して

$$W_i(p) = p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \pi_j(p) \tag{40}$$

で与えられる.（右辺第一項の $\cdot$ は $\boldsymbol{R}^\ell$ における内積を表す.）関数 $W_i : \Delta \to \boldsymbol{R}$ は，利潤関数 π_j, $j = 1, 2, \cdots, n$ がすべて連続であれば，明らかに連続である．W_i を消費主体 i の**（標準的な意味での）資産関数（wealth function）** と呼ぶ．ただし以下の議論は W_i が実際にどのような形の関数かということには本質的に依存しない．以下ではともかく W_i が $\Delta \subset \boldsymbol{R}^\ell_+ \setminus \{0\}$ という定義域を持ち $\boldsymbol{R}$ に値をとる連続関数であるものとする．

消費集合 $X_i \subset R^\ell$，効用関数 u_i，ならびに価格ベクトル $p \in R^\ell$ と資産 $W \in R$ を所与とした消費主体の行動は，次のようにまとめることができる．

> （消費主体の効用最大化問題：UMP）$p = (p^1, p^2, \cdots, p^\ell) \in R^\ell$ と $W \in R$ を所与として，消費行動 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_\ell) \in R^\ell$ の価値
>
> $$u_i(x)$$
>
> を最大にするような $x \in X_i, p \cdot x \leq W$ を選択する．

静学的理論における消費主体の行動は上の数学的問題の解についての考察に尽きることになる．生産主体の場合と同様，次の三つの問いがここでの主たる関心事となる．

(i) 最大化問題の解が存在するための条件は何か.

(ii) 最大化問題の解が存在するとしたとき，最大化問題のパラメター, p, W, の変化にともなって，実現できる最大値がどのように変化するか.

[30] これが先の選好の連続性の概念と同値であることは練習問題とする．

(iii) 最大化問題の解が存在するとしたとき，最大化問題のパラメター, p, W, の変化にともなって，最大化の解（の集合）がどのように変化するか．

(i) は消費主体の行動について語る場合の大前提となる条件である．(ii) はいわゆる間接効用関数についての議論である．(iii) は個別消費主体の需要関数（需要対応）についての考察である．

5.2.4　需要対応

消費主体 i の消費集合を X_i とする．以下では X_i を $\boldsymbol{R}^\ell$ の有界かつ閉な凸部分集合である（つまりコンパクト性を仮定してしまう）ものとする．消費主体 i の選好を $\precsim_i$ で表し，$W_i : \Delta \to \boldsymbol{R}$ を消費主体 i の資産関数とする．さらに今，$\precsim_i$ は連続な効用関数 u_i によって表されているものとする．

Definition 5.5 （予算制約対応）資産 $w \in R$ と価格 $p \in R^\ell$ に対して，$\beta_i(p, w) = \{x \in X_i | \, p \cdot x \leq w\}$ を与える対応 β_i を，消費主体 i の（**予算制約対応 (budget correspondence)**）という．

資産関数 W_i が連続関数として与えられており，$w = W_i(p)$ とするならば，上の予算制約は p のみの関数（対応）となる．$\beta_i(p, W_i(p))$ を $B_i(p)$ で表し，混乱の生じない限り B_i のことも予算制約対応と呼ぶ．

Definition 5.6（需要対応）価格 $p = (p^1, \cdots, p^\ell) \in \Delta$ に対して，$\{x | x \in X_i, p \cdot x \leq W_i(p), \forall \hat{x} \in X_i, (p \cdot \hat{x} \leq W_i(p) \Longrightarrow u_i(\hat{x}) \leq u_i(x)\}$ を与える対応 $\xi_i : \Delta \to X_i$ を，消費主体 i の需要対応 (demand correspondence) と呼ぶ．

Theorem 5.7　資産関数 W_i が，資産のミニマム条件 $\forall p \in \Delta, \inf_{x \in X_i} p \cdot x < W_i(p)$, を満たすとき，$\xi : \Delta \to X_i$ は非空の値を持ち，かつ ξ のグラフは $\Delta \times X_i$ の閉部分集合となる．

(**Proof:**) ξ_i が非空の値を持つことは X_i のコンパクト性から自明であるので省略する．証明すべき内容は，ξ のグラフが $\Delta \times X_i$ の閉部分集合であること，すなわち $\{p^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を Δ 内で p^* に収束する点列とし，$\{x^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を全ての ν について $x^\nu \in \xi_i(p^\nu)$ を満たしながら $x^* \in X_i$ に収束する点列とするとき，$x^* \in \xi_i(p^*)$ となることである．

結論を否定して $x^* \notin \xi_i(p^*)$ と仮定し，矛盾を導くことにする．すべての ν に対して，

$$p^\nu \cdot x^\nu \leq W_i(p^\nu),$$

であることから，両辺の極限をとれば

$$p^* \cdot x^* \leq W_i(p^*).$$

すなわち x^* は p^* の下での予算制約式を満たしておらねばならないことがわかる．従って $x^* \notin \xi_i(p^*)$ とすると，ある $y^* \in X_i$ が存在して，$p^* \cdot y^* \leq W_i(p^*)$ かつ $u_i(x^*) < u_i(y^*)$ となるはずである．

このとき，効用関数の連続性によって x^* の近傍 U_{x^*} および y^* の近傍 U_{y^*} が存在し，

$$\forall x \in U_{x^*}, \forall y \in U_{y^*}, u_i(x) < u_i(y),$$

が成立する．また，資産のミニマム条件より，ある $z \in X_i$ が存在して，$p^* \cdot z < W_i(p^*)$ を成立させるはずである．ここで，点列 $\{y^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を

$$y^\nu = \frac{1}{\nu} z + (1 - \frac{1}{\nu}) y^*, \, \nu = 1, 2, \cdots,$$

と定義すれば，

$$y^\nu \to y^*,$$

である．また $x^\nu \to x^*$ であることを同時に考慮すれば，十分大きな $\bar{\nu}$ が存在して，

$$\forall \nu \geq \bar{\nu},\, x^\nu \in U_{x^*},\ \text{and}\ y^\nu \in U_{y^*}. \tag{41}$$

さて，上で固定した $\bar{\nu}$ に対して，

$$\lim_{\nu\to\infty} p^\nu \cdot y^{\bar{\nu}} = \lim_{\nu\to\infty} p^\nu \cdot (\frac{1}{\bar{\nu}}z + (1-\frac{1}{\bar{\nu}})y^*) = \frac{1}{\bar{\nu}}p^*\cdot z + (1-\frac{1}{\bar{\nu}})p^*\cdot y^* = p^*\cdot y^{\bar{\nu}} < W_i(p^*)$$

が成立することに注意する．ここで $\delta = \frac{W_i(p^*)-p^*\cdot y^{\bar{\nu}}}{2} > 0$, とおけば，内積の連続性より $\hat{\nu}$ を十分に大きくとることによって，

$$\forall \nu \geq \hat{\nu},\, p^\nu \cdot y^{\bar{\nu}} < W_i(p^*) - \delta \tag{42}$$

とすることができる．一方 W_i の連続性によって，$W_i(p^\nu) \to W_i(p^*)$ であるから，十分大きな $\tilde{\nu}$ が存在して，

$$\forall \nu \geq \tilde{\nu},\, W_i(p^*) - \delta < W_i(p^\nu) \tag{43}$$

となるはずである．ν_0 を $\nu_0 > \bar{\nu}$ かつ $\nu_0 > \hat{\nu}$ かつ $\nu_0 > \tilde{\nu}$ となるように，選ぶと，式 (41), 式 (42), および式 (43) より，

$$\begin{aligned} u_i(x^{\nu_0}) &< u_i(y^{\bar{\nu}}),\ \text{and} \\ p^{\nu_0}\cdot y^{\bar{\nu}} &< W_i(p^*) - \delta,\ \text{and} \\ W_i(p^*) - \delta &< W_i(p^{\nu_0}). \end{aligned}$$

すなわち，$y^{\bar{\nu}}$ は x^{ν_0} よりも好まれており，かつ p^{ν_0} の下での予算制約式を満たすことになる．もちろんこれは，x^{ν_0} が p^{ν_0} の下での効用最大化点であること（$x^{\nu_0} \in \xi_i(p^{\nu_0})$）に矛盾する． (Q.E.D.)

Corollary 5.8 資産のミニマム条件が満たされており，かつ $\forall p \in \Delta$ について $\xi_i(p)$ がただ一点のみからなるとき，$\xi_i : \Delta \to X_i$ は（関数とみなせば）連続関数である．

(**Proof:**) $p^n \to p^* \in \Delta$ を Δ 内の点列とし，$\{x^n\} = \xi_i(p^n),\, n = 1,2,\cdots,$ とする．証明すべきことは $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ が $x^* \in X_i$, $\{x^*\} = \xi_i(p^*)$ に収束することである．結論を否定すると，ある $\epsilon > 0$ が存在して x^* の ϵ 近傍 $B(\epsilon, x^*)$ について，$n_1, n_2, \cdots$ という無限に多くの番号について $x^{n_t} \notin B(\epsilon, x^*),\, t = 1,2,\cdots$ とすることができる．値域 X_i はコンパクトであるから，$\{x^n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{x^{n_t}\}_{t=1}^\infty$ に対して，さらに収束する部分列 $\{x^{m_t}\}_{t=1}^\infty$ が存在する．部分列の収束先は X_i の要素であるから，グラフが閉であるという前定理の結論および $p^{m_t} \to p^*$ より $\{x^{m_t}\}_{t=1}^\infty$ の収束先は $\xi_i(p^*)$ の要素，すなわち x^* にほかならない．ところがこれは，$\{x^{m_t}\}_{t=1}^\infty$ が $\{x^{n_t}\}_{t=1}^\infty$ の部分列であり，$B(\epsilon, x^*)$ の外側にしか存在しないという事実に反する． *Q.E.D.*

5.2.5 Maximum Theorem との関連

定理 5.7 は，資産のミニマム条件が満たされる範囲において，Budget 対応 $\beta : \Delta \ni p \mapsto \{x \in X_i | \, p\cdot x \leq W_i(p)\}$ が連続対応になるということを示せば，先の 4.2.7 節で述べた Maximum Theorem（定理 4.17）の結果として直ちに示すことができる．ただし β が連続対応であることを示す手間は，上の直接証明の手続きとさほどかわらないので，ここでは指摘するにとどめる．Debreu (1959) において需要対応の上半連続性（閉グラフ性）は，Maximum Theorem を介して証明されている．

またこのとき Maximum Thorem の前半は，price の変化に対して実現される（最大）効用水準の変化が連続的であることを意味する．すなわち（資産関数を間にはさんでいるという形で，そのままではないけれども一応）後の節で取り扱うところの間接効用関数に対して，その連続性を保証していることになる．

5.2.6　支出関数

消費主体の効用最大化問題（ UMP ）に対して，逆に実現される効用水準を固定し，価格を所与として支出を最小化するような消費ベクトルを求めるという問題（以下 EMP 問題 — Expenditure Minimization Problem — と呼ぶ）を考えることができる．消費集合 X_i および効用関数 u_i の下で，効用水準と価格を所与とした以下の問題を**支出最小化問題**と呼ぶ．

（ EMP ）効用水準 $\bar{U}$ と $p=(p_1,p_2,\cdots,p_\ell)\in R^\ell$ を所与として，$u_i(x)=\bar{U}$ なる消費行動 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_\ell)\in R^\ell$ に必要な支出額

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k$$

を最小にするような $(x_1,x_2,\cdots,x_\ell)\in X_i$ を選択する．

消費行動の記述は，UMP と EMP 双方の観点から眺めると見通しが良く，EMP を UMP の双対問題，このような双対問題の形式を持って進める分析を双対分析と呼ぶ．

支出最小化問題も（効用最大化問題と同様），やはりその解が存在するとは限らない．(EMP) 問題に少なくとも一つの解が存在するような $p\in R^\ell$ の範囲（もちろん $\bar{U}$ に依存する）を Δ で表すことにすれば，我々は Δ を定義域とする次の関数（支出関数）を得る．

Definition 5.9 :（支出関数）Δ 上で定義され，値を $\boldsymbol{R}$ に持つ関数 e_i を

$$e_i : p \mapsto \min_{x\in X_i u_i(x)=\bar{U}} \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k$$

と定義するとき，e_i を消費主体 i の効用水準 $u_i(x)=\bar{U}$ を固定したときの**支出関数**と呼ぶ．e_i は $\bar{U}$ に依存するので，とくにこれも変数と考えて，

$$E_i(\bar{U},p)=e_i(p) \text{ — } e_i \text{ は効用水準 } \bar{U} \text{ を固定したときの支出関数}$$

と書くとき，E_i を，消費主体 i の**支出関数** (expenditure function) と呼ぶ.（e_i は単に E_i の第一変数を固定したものである.）

効用水準 $\bar{U}$ を固定した支出関数 e_i は，明らかに $\forall\alpha\in R,\forall p\in\Delta, e_i(\alpha p)=\alpha e_i(p)$ を満たす.（すなわち，支出関数は p に関して一次同次である.）さらに，Δ が，p,p' および $q=\alpha p+(1-\alpha)p'$, $(0\le\alpha\le 1)$, という 3 つの点を要素としているとき，$e_i(q)\ge\alpha e_i(p)+(1-\alpha)e_i(p')$ が成り立つ．すなわち，Δ が凸集合のとき，$e_i:\Delta\to R$ は凹関数となる.（証明は練習問題とする.）

Theorem 5.10　効用水準 $u_i(x)=\bar{U}$ を固定した支出関数 $e_i:\Delta\to R$ について，以下のことが成り立つ．

(i) $\forall p\in\Delta$, $\forall\alpha\in R_+$, $\alpha p\in\Delta$ and $e_i(\alpha p)=\alpha e_i(p)$.

(ii) $\forall p\in\Delta$, $\forall p'\in\Delta$, $\forall\alpha\in R$, if $\alpha p+(1-\alpha)p'$ is an element of Δ, then $e_i(\alpha p+(1-\alpha)p')\ge\alpha e_i(p)+(1-\alpha)e_i(p')$.

効用水準 $\bar{U}$ を固定した支出関数 e_i に対して，$p^* \in \Delta$ と $e_i(p^*) = \sum_{k=1}^{\ell} q_k x_k^*$ をみたす $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_\ell^*) \in X_i$（すなわち効用水準 $\bar{U}$ を実現するにあたって p^* の下での支出最小化を実現するような $x_1^*, \cdots, x_\ell^*$）を用いて $R^\ell \times R$ における部分集合 $H = \{(p_1, p_2, \cdots, p_\ell, \sum_{k=1}^{\ell} p_k \cdot x_k^*) \in R^\ell \times R | \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k^* = e_i(p^*)\}$ を考えると，H は $(p^*, e_i(p^*))$ において e_i のグラフを上から支える平面になる．すなわち点 $p = p^*$ において，$p \cdot x^*$ のグラフは $e_i(p)$ のグラフに接し，それ以外の p については $e_i(p) \leq \sum_{k=1}^{\ell} p_k(x_k^*)$ が成立する．したがって，もしも関数 $e_i(p_1, \cdots, p_\ell)$ が点 p^* において変数 p_k, $k = 1, \cdots, \ell$ についての偏導値を持つとすれば，$\frac{\partial e_i}{\partial p_k}(p^*) = x_k^*$, $k = 1, \cdots, \ell$ が成り立つ（ Shephard's Lemma の図形的証明）．

Theorem 5.11 効用水準 $u_i(x) = \bar{U}$ を固定した支出関数 $e_i : \Delta \ni p = (p_1, \cdots, p_\ell) \mapsto e_i(p) \in R$ が点 $p = p^*$ において変数 p^k に関する偏導値を持つとする．また $(x_1^*, \cdots, y_\ell^*) \in X_i$ を p^* の下での支出最小化を実現するような消費行動であるとする．このとき $k = 1, \cdots, \ell$ について，

$$\frac{\partial e_i}{\partial p_k}(p^*) = x_k^*$$

が成り立つ．

効用水準を $u_i(x) = \bar{U}$ に固定した支出関数 e_i の連続性は，最小化問題の符号を逆にして最大化問題とすれば Maximum Theorem から容易に示すことができる．(練習問題とする.)

5.3　静学的消費主体の行動（効用関数の微分可能性に基づく議論）

純粋な経済学理論において，消費主体の行動の記述は一般的選好に基づいてそのほとんどの内容が記述されており，微分可能性は言うまでもなく効用関数の存在すら，必ずしも必要な前提ではない．しかしながら，微分可能な効用関数に基づく議論は非常に基礎的かつ歴史的なものでもあるので，ここではその場合を中心に話を進める．

本項において消費主体 i の選好は convex な消費集合 X_i 上連続かつ $\mathrm{int}\, X_i \neq \emptyset$ 上２回連続的微分可能（２階までの全ての偏導関数が存在してしかもそれらが全て連続である）な効用関数 $u : X_i \to \boldsymbol{R}$ によって表現されているものとする．また，選好は locally non-satiated かつ strictly convex であるものとする．(locally non-satiated であることは，消費主体の効用最大化問題の解が予算制約式を等号で満たす範囲に存在することを，strictly convex なることはその解の一意性をそれぞれ保証する．)

5.3.1　マーシャル型需要関数

価格 $p = (p_1, \cdots, p_\ell) \in \boldsymbol{R}^\ell \setminus \{0\}$ および資産 $W \in \boldsymbol{R}$ を所与とした消費主体 i の最大化問題，

$$\begin{array}{llrcl} & \text{Max} & u(x_1, \cdots, x_\ell) & & \\ \textbf{(CP)} & \textbf{subject to} & p_1 x_1 + \cdots + p_\ell x_\ell & = & w \\ & & (x_1, \cdots, x_\ell) & \in & X_i \end{array}$$

の解（もし存在するとすれば）を，$x(p, w) = (x_1(p, w), \cdots, x_\ell(p, w))$ で表す．(選好が strictly convex という仮定により，解があるとすればそれは unique である．）もしも，$(\boldsymbol{R}^\ell \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{R}$ のある開部分集合 $\mathfrak{O}$ の上で $\forall (p, w) \in \mathfrak{O}$ に対して $x(p, w)$ が存在するとき，これを関数とみなして，**マーシャル型需要関数（ Marshallian Demand Function ）**と呼ぶ．以下，Marshallian demand function に関して，分析を容易にする目的で次の仮定を置く．

Assumption 5.12　以下，本項において分析の対象となる Marshallian Demand Function は常に $\mathrm{int}\, X_i$ 内に値をとるものとする．

さて，まずはじめに Marshallian demand function の微分可能性について考える．$x(p, w)$ は，$(p, w) \in \mathfrak{O}$ を所与とした消費主体最大化問題 **(CP)** の X_i における内点解であるから，$x_1, \cdots, x_\ell$ と λ を変数として Lagrangean を

$$\mathfrak{L}(x_1, \cdots, x_\ell, \lambda) = u(x_1, \cdots, x_\ell) - \lambda(p_1 x_1 + \cdots + p_\ell x_\ell - w)$$

とすれば，$(x_1(p, w), \cdots, x_\ell(p, w)) = x(p, w)$ は $\ell + 1$ 本の方程式系

$$\begin{array}{rcl} -p_1 x_1 - \cdots - p_\ell x_\ell + w & = & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 & = & 0 \\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_\ell} - \lambda p_\ell & = & 0 \end{array} \tag{44}$$

を，(λ のある値とともに）満たすはずである．ここで陰関数定理 II を用いる．$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x(p, w))$ を簡単に u_{ij} と書くことにして，もしも

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & u_{\ell 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_\ell & u_{1\ell} & \cdots & u_{\ell\ell} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{45}$$

が満たされているならば，ある (p,w) の開近傍 $U \subset \mathcal{O}$ が存在し，各 $(\hat{p},\hat{w}) \in U$ に対して，式 (44) を満たす $x_1,\cdots,x_\ell$ は

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(\hat{p},\hat{w}) \\ x_1 &= \hat{x}_1(\hat{p},\hat{w}) \\ &\vdots \\ x_\ell &= \hat{x}_\ell(\hat{p},\hat{w}) \end{aligned} \tag{46}$$

と一意的に表され，これらは U 上 C^1 級である．もちろん Martialian Demand Function の値 $x_1(\hat{p},\hat{w}),\cdots,$ $x_\ell(\hat{p},\hat{w})$ も，式 (44) を満たすので，一意性から $x_i(\hat{p},\hat{w}) = \hat{x}_i(\hat{p},\hat{w}),\ i = 1,\cdots,\ell$. すなわち，Marshallian Demand Function はこのとき U 上 C^1 級（従って当然連続）となる．

上の議論において，はじめの $(p,w) \in \mathcal{O}$ の取りかたは任意であったから，仮に $\mathcal{O}$ 全域において条件 (45) を仮定すれば，Marshallian Demand Function は $\mathcal{O}$ 上全ての点において C^1 級（従って当然連続）となる.[31]

5.3.2　間接効用関数

消費主体最大化問題 **(CP)** に対して，その解が開集合 $\mathcal{O} \subset (\boldsymbol{R}^\ell \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{R}$ 上で定義された Marshallian demand function $x(p,w)$ によって与えられているものとする．このとき

$$v(p,w) = u(x(p,w)) \tag{47}$$

でもって定義される $\mathcal{O}$ 上の関数 v を**間接効用関数 (Indirect Utility Function)** という．Marshallian Demand Function が C^1 級であるから，明らかに v も $\mathcal{O}$ 上 C^1 級である．

Theorem 5.13　**（所得の限界効用）**$\lambda(p,w)$ を，式 (46) において demand function に付随して出てきたところの $\mathcal{O}$ 上の関数とする．このとき

$$\frac{\partial v}{\partial w}(\hat{p},\hat{w}) = \lambda(\hat{p},\hat{w}).$$

(Proof)　合成関数微分法によって $\frac{\partial v}{\partial w}(\hat{p},\hat{w}) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(\hat{p},\hat{w}))\frac{\partial x_i}{\partial w}(\hat{p},\hat{w})$ である．ここで式 (44) より $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x(\hat{p},\hat{w})) = \hat{p}_i\lambda(\hat{p},\hat{w}), i = 1,\cdots,\ell$ を右辺に代入すると，右辺は

$$\lambda(\hat{p},\hat{w})\sum_{i=1}^{\ell}\hat{p}_i\frac{\partial x_i}{\partial w}(\hat{p},\hat{w})$$

となる．ところで，$x(p,w)$ は (CP) 問題の解であるから，常に $p_1x_1(p,w)+\cdots+p_\ell x_\ell(p,w) = w$ を満たす．この式の両辺を w で偏微分し，$(\hat{p},\hat{w})$ で評価すれば

$$\sum_{i=1}^{\ell}\hat{p}_i\frac{\partial x_i}{\partial w}(\hat{p},\hat{w}) = 1.$$

以上をまとめて証明すべき式を得る．　**Q.E.D.**

上の事実から，λ はしばしば所得の限界効用と呼ばれる．

[31]条件 (45) の成立については，生産主体のときの議論，注 26，を参照せよ．

5.3.3　支出関数および補償需要関数

$(p, w) \in \mathfrak{O}$ 上で定義される間接効用関数 v の値域に含まれる，ある開集合 $V \subset \boldsymbol{R}$ をとる．このとき，$\bar{v} \in V$ に対して定まる C^1 級方程式

$$v(p, w) = \bar{v} \tag{48}$$

に対して陰関数定理を適用すると，式 (48) を満たすある $(\bar{p}, \bar{w}) \in \mathfrak{O}$ において条件

$$\frac{\partial v}{\partial w}(\bar{p}, \bar{w}) \neq 0 \tag{49}$$

（定理 5.13 を考慮すると $\lambda(\bar{p}, \bar{w}) \neq 0$ と言ってもよい）が成り立つならば,[32] $(\bar{p}, \bar{v}) \in (\boldsymbol{R}^\ell \setminus \{0\}) \times V$ のある開近傍 $U \subset (\boldsymbol{R}^\ell \setminus \{0\}) \times V$ において $w = w(p, v)$ と一意的に表すことができる.[33] v が C^1 級であるから $w(p, v)$ もまた U 上 C^1 級である．関数 $w(p, v)$ は，**支出関数 (Expenditure Function)**（前節で E_i と書いたもの）である．

支出関数 $w(p, v)$ が，上のようにある開集合 U 上で定義されているとき，

$$h(p, v) = x(p, w(p, v)),\ (h_i(p, v) = x_i(p, w(p, v)), \forall\, i = 1, \cdots, \ell), \tag{50}$$

によって定義される h を**ヒックス型補償需要関数 (Hicksian Compensated Demand Function)** と呼ぶ．

Theorem 5.14 (Shepard's Lemma)

$$\frac{\partial w}{\partial p_i}(\hat{p}, \hat{v}) = h_i(\hat{p}, \hat{v})$$

(Proof) そもそも $v(p, w) = \bar{v}$ に陰関数定理を適用して $w(p, v)$ を得たのであるから，

$$\frac{\partial w}{\partial p_i}(\hat{p}, \hat{v}) = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))}{\frac{\partial v}{\partial w}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))}{\lambda(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))} \tag{51}$$

一方 $v(p, w) = u(x(p, w))$ であったことを思い起こせば，

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))) \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) \tag{52}$$

ここでまた式 (44) を用いて，$\frac{\partial u}{\partial x_j}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) = \hat{p}_j \lambda(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))$ を代入すれば，

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) = \sum_{j=1}^{\ell} \hat{p}_j \lambda(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) = \lambda(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) \sum_{j=1}^{\ell} \hat{p}_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) \tag{53}$$

さらに, Marshallian Demand に対して常に成立する式 $\sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j(p, w) = w$ を p_i で偏微分すれば，

$$x_i(p, w) + \sum_{j=1}^{\ell} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(p, w) = 0.$$

それを $(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))$ で評価すると，

$$x_i(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) + \sum_{j=1}^{\ell} \hat{p}_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) = 0.$$

[32] 例えば，$\bar{p} \geq 0$ かつ u が strictly increasing のときなど．

[33] このとき，$\bar{w}$ の近傍で，という必要は無い．なぜなら，local non-satiation より，$w_1 < w_2$ ならば任意の p で $v(p, w_1) < v(p, w_2)$, すなわち，与えられた p, v に対して異なる二つの w の値が式 (48) を満たすことは，そもそもあり得ないからである．

従って式 (53) は，

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) = \lambda(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))(-x_i(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))) \tag{54}$$

となり，これを式 (51) の最右辺に代入すると，

$$\frac{\partial w}{\partial p_i}(\hat{p}, \hat{v}) = -\frac{\lambda(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))(-x_i(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})))}{\lambda(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})))} = x_i(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) = h_i(\hat{p}, \hat{v}), \tag{55}$$

Q.E.D.

THEOREM 5.15 (Roy's Identity)

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial p_i}(\hat{p}, \hat{w})}{\frac{\partial v}{\partial w}(\hat{p}, \hat{w})} = -x_i(\hat{p}, \hat{w})$$

(Proof) 分子を前定理の証明中の式 (54) と全く同様に変形すれば，分母が所得の限界効用であることから，結論は直ちに従う， **(Q.E.D.)**

THEOREM 5.16 (Slutsky Equation)

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v})) = \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\hat{p}, \hat{v}) - \frac{\partial x_i}{\partial w}(\hat{p}, w(\hat{p}, \hat{v}))h_j(\hat{p}, \hat{v})$$

(Proof) $h_i(p, v) = x_i(p, w(p, v))$ なので，両辺を p_j で偏微分し，定理 5.14 を用いれば出てくる，**(Q.E.D.)**

5.4 選好と消費についてのまとめ

- 数学的に R^n の概念（線型構造・位相構造・順序構造）は必須.
- 消費主体 i の消費集合 $X_i \subset R^\ell$
- 完備な前順序としての選好と効用関数.
- 効用最大化問題と需要関数
- 間接効用関数・費用関数・補償需要関数
- 比較静学・価格効果（スルツキー方程式）・陰関数定理

5.5 補論 1：制約条件下の最大化問題について

前節の **CP** 問題 (p.48) の解は，それが X の内点であるとの仮定 (Assumption 5.12) の下で Lagrangean

$$\mathcal{L}(x_1,\cdots,x_\ell,\lambda)=u(x_1,\cdots,x_\ell)-\lambda(p_1x_1+\cdots+p_\ell x_\ell-w)$$

の最大化問題の 1 階の必要条件を満たさねばならないことが言えた．ただし，解が X_i の境界にくる場合には必ずしもそれは言えない．X_i の境界においては，最大化問題の条件のうちで $(x_1,\cdots,x_\ell)\in X_i$ が本質的に関っている可能性があるからである．例えば仮に X_i という範囲が非負領域 $\{(x_1,\cdots,x_\ell)|\,0\le x_1,\cdots,0\le x_\ell\}$ であったとすれば，これは不等式制約の入った最大化問題として扱わねばならない．

一般に，等式および不等式の制約の入った最大化問題

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max} & u(x_1,\cdots,x_\ell) & & \\ \text{Sub.to} & g^1(x_1,\cdots,x_\ell) & = & 0 \\ & & \vdots & \\ & g^m(x_1,\cdots,x_\ell) & = & 0 \\ & h^1(x_1,\cdots,x_\ell) & \le & 0 \\ & & \vdots & \\ & h^n(x_1,\cdots,x_\ell) & \le & 0 \end{array} \tag{56}$$

を考え，その解を $x^*=(x_1^*,\cdots,x_\ell^*)$ とする．このとき x^* の満たすべき必要条件（ Karush-Kuhn-Tucker 必要条件）について以下述べる．

5.5.1 等式制約のみの場合

まず，制約条件が等式のみからなる場合について述べる．取り扱うのは，以下のような最大化問題である．

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max} & u(x_1,\cdots,x_\ell) & & \\ \text{Sub.to} & g^1(x_1,\cdots,x_\ell) & = & 0 \\ & & \vdots & \\ & g^m(x_1,\cdots,x_\ell) & = & 0 \end{array} \tag{57}$$

制約条件がただ 1 つの等式（上で $m=1$ ）である場合は，先の 4.3.2 節において $f(y_1,\cdots,y_\ell)=0$ から $y_1=g(y_2,\cdots,y_\ell)$ を導出し（陰関数定理 I を用いて一つの変数について局所的に方程式系を解き），それを用いて制約条件付き最大化問題を制約条件の無い最大化問題に帰着させたのと全く同様の手続きで，その必要条件を導きだすことができる．制約条件式が m 本になった場合も，本質的にはこれと全く同様の手続きで，必要条件を得ることができる．ただし m 個の変数について同時に局所的に方程式系を解くためには，陰関数定理 II を用いる必要があり，そしてそのためには，m 本の制約式が局所的に独立であるという条件が必要となる．

Assumption 5.17 （ Constraint Qualification ）条件付き最大化問題 (57) と，その解 $x^*=(x_1^*,\cdot,x_\ell^*)$ において，制約条件である m 本の等式の左辺の関数はすべて C^1 級であり，

$$\text{rank}\begin{bmatrix} D_1g^1(x^*) & \cdots & D_\ell g^1(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1g^m(x^*) & \cdots & D_\ell g^m(x^*) \end{bmatrix}=m$$

を満たす．すなわち上の行列において，ある m 個の列ベクトルの組は一次独立である．

Theorem 5.18 等式制約条件付き最大化問題 (57) において，u は C^1 級とする．またその解を $x^* = (x_1^*, \cdots, x_\ell^*)$ とし，x^* において仮定 5.17 が成立しているものとする．このとき，ある $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in R$ が存在して，

$$D_i u(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_i g^j(x^*),\ \forall i = 1, \cdots, \ell \tag{58}$$

が成立する．

Proof： まず関数 $F : R^\ell \to R^{m+1}$ を，

$$F(x_1, \cdots, x_\ell) = \begin{bmatrix} u(x_1, \cdots, x_\ell) \\ g^1(x_1, \cdots, x_\ell) \\ \vdots \\ g^m(x_1, \cdots, x_\ell) \end{bmatrix} \tag{59}$$

と定義する．さらにこの関数のヤコビ行列の階数を，

$$\operatorname{rank} F'(x^*) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} u'(x^*) \\ (g^1)'(x^*) \\ \vdots \\ (g^m)'(x^*) \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} D_1 u(x^*) & \cdots & D_\ell u(x^*) \\ D_1 g^1(x^*) & \cdots & D_\ell u(x^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 g^m(x^*) & \cdots & D_\ell u(x^*) \end{bmatrix}$$

と表す．仮定 5.17 から，上の行列の rank は m または $m+1$ である．

（ Case 1 : F のヤコビ行列の階数が m のとき.）

このとき，$m+1$ の行ベクトルが一次従属であることから，少なくとも一つは 0 でない $a_0, a_1, \cdots, a_m \in R$ が存在して，

$$a_0 u'(x^*) + a_1 (g^1)'(x^*) + \cdots + (g^m)'(x^*) = 0 \tag{60}$$

と書ける．このとき，$a_0 = 0$ とすると，Constraint Qualification の仮定（上の行列の最後の m 行は一次独立）に反するので，$a_0 \neq 0$. $\lambda_i = a_i / a_0$, $i = 1, \cdots, m$ と置けば，結論を得る．

（ Case 2 : F のヤコビ行列の階数が $m+1$ のとき.）

$x_1, \cdots, x_\ell$ および δ を実変数とする以下のような方程式系を考える．

$$\begin{aligned} u(x_1, \cdots, x_\ell) - u(x_1^*, \cdots, x_\ell^*) - \delta &= 0 \\ g^1(x_1, \cdots, x_\ell) - g^1(x_1^*, \cdots, x_\ell^*) &= 0 \\ &\vdots \\ g^m(x_1, \cdots, x_\ell) - g^m(x_1^*, \cdots, x_\ell^*) &= 0 \end{aligned} \tag{61}$$

この方程式系に陰関数定理 II を適用することを考える．まず $x_1 = x_1^*, \cdots, x_\ell = x_\ell^*, \delta = 0$ は明らかに上の方程式系の解である．また，F のヤコビ行列の階数が $m+1$ であるという現在の仮定から，$x_1, \cdots, x_\ell$ のうちの $m+1$ 個の変数（ $x_1, \cdots, x_{m+1}$ として一般性を失わない）について条件

$$\det \begin{bmatrix} D_1 u(x^*) & \cdots & D_{m+1} u(x^*) \\ D_1 g^1(x^*) & \cdots & D_{m+1} g^1(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g^m(x^*) & \cdots & D_{m+1} g^m(x^*) \end{bmatrix} \neq 0 \tag{62}$$

が成立する．さて，ここで系 (61) の左辺を，順に $x_1, \cdots, x_{m+1}$ に関して偏微分し $x_1^*, \cdots, x_\ell^*, 0$ で評価した $(m+1)\times(m+1)$ 行列（それは容易に確かめれるように以下の形になる）

$$\begin{bmatrix} D_1u(x^*) & \cdots & D_{m+1}u(x^*) \\ D_1g^1(x^*) & \cdots & D_{m+1}u(x^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1g^m(x^*) & \cdots & D_{m+1}u(x^*) \end{bmatrix} \tag{63}$$

の行列式は式 (62) から 0 ではない．よって陰関数定理 II（p.31, 定理 4.20 ）を用いて，$x_1^*, \cdots, x_{m+1}^*$ の近傍 U と $x_{m+2}^*, \cdots, x_\ell^*, 0$ の近傍 V が存在して，V 上

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{m+2}, \cdots, x_\ell, \delta) \\ &\vdots \\ x_{m+1} &= x_m(x_{m+2}, \cdots, x_\ell, \delta) \end{aligned}$$

と表すことができる．このとき特に，ある $(x_{m+2}, \cdots, x_\ell, \delta) \in V$, $\delta > 0$ が存在して方程式系 (61) を満たすことになるが，容易に示せるように，これは x^* が最大化問題 (57) の解であることに反する． **Q.E.D.**

5.5.2　不等式制約の入った場合

等式ならびに不等式制約の入った条件付き最大化問題

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max} & u(x_1, \cdots, x_\ell) & & \\ \text{Sub.to} & g^1(x_1, \cdots, x_\ell) & = & 0 \\ & & \vdots & \\ & g^m(x_1, \cdots, x_\ell) & = & 0 \\ & h^1(x_1, \cdots, x_\ell) & \leq & 0 \\ & & \vdots & \\ & h^n(x_1, \cdots, x_\ell) & \leq & 0 \end{array} \tag{64}$$

を考え，その解を $x^* = (x_1^*, \cdots, x_\ell^*)$ とする．解 x^* の満たすべき必要条件について考える．まず，先程の等式制約の Constraint Qualification の仮定と同様のものを定める．不等式制約条件のうち，$x^* = (x_1^*, \cdots, x_\ell^*)$ においては等式で成立しているものの Index の全体を $I(x^*)$ で表す．

Assumption 5.19 （ Constraint Qualification 2 ）条件付き最大化問題 (64) と，その解 $x^* = (x_1^*, \cdot, x_\ell^*)$ において，制約条件である m 本の等式の左辺ならびに m 本の不等式の左辺の関数はすべて C^1 級であり，さらに $I(x^*)$ の要素を $i_1, \cdots, i_k$ とするとき，

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D_1g^1(x^*) & \cdots & D_\ell g^1(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1g^m(x^*) & \cdots & D_\ell g^m(x^*) \\ D_1h^{i_1}(x^*) & \cdots & D_\ell h^{i_1}(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1h^{i_k}(x^*) & \cdots & D_\ell h^{i_k}(x^*) \end{bmatrix} = m + k$$

を満たす．

THEOREM 5.20 （ **Karush-Kuhn-Tucker 必要条件**）等式および不等式制約の下での条件付き最大化問題 (64)，を考え，その解を $x^* = (x_1^*, \cdots, x_\ell^*)$ とする．ここで u は C^1 級とし，x^* において Constraint Qualification の条件 (5.19) が成立しているものとする．このとき，ある $\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_n \in R$ が存在して，

$$D_i u(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_i g_j(x^*) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j D_i h_j(x^*), \forall i = 1, \cdots, \ell \tag{65}$$

$$0 \le \mu_j, \forall j = 1, \cdots, n \tag{66}$$

$$\mu_j h^j(x^*) = 0, \forall j = 1, \cdots, n \tag{67}$$

が成立する．

5.6 補論 2：顕示選好理論

価格 $p^i \in R^\ell$ および資産 $w^i \in R$，そしてその下での需要 $x^i \in R^\ell$ についての有限個または無限個のデータ $(x^i, p^i, w^i)_{i \in I}$ が与えられているものとする．このとき無限個のデータ $\{x^i | i \in I\}$ を全て含む適当な空間 X と X 上の完備な前順序 $\precsim$ を選好としてもつ適当な個人を考えて，データ $(x^i, p^i, w^i)_{i \in I}$ がその個人の最大化問題の解となるようにすることができるか，すなわち，

$$\forall i \in I, \forall x \in X, (p^i \cdot x \le w^i) \to (x \precsim x^i) \tag{68}$$

としうるか，という問題を考える．

ASSUMPTION 5.21 **（顕示選好の強公理）**選択範囲 X と，X 上の需要データ $(x^i, p^i, w^i)_{i \in I}$ が与えられているものとする．$x \in X$ と，ある $x^i \in X$ について，“$x \neq x^i$ であり，$p^i \cdot x \le w^i$ である” ことを “$x \prec_r x^i$” で表し，x^i is directly revealed prefered to x と呼ぶ.（つまり，x^i が選ばれた状況下では $x \neq x^i$ を選択することも可能であったにもかかわらず，x^i が選択された，ということを表す.）データ $(x^i, p^i, w^i)_{i \in I}$ が顕示選好の強公理を満たすとは，以下の条件が成立することをいう．2 個以上の任意有限個のデータ $(x^{i_1}, p^{i_1}, w^{i_1}), \cdots, (x^{i_n}, p^{i_n}, w^{i_n})$ について，

$$x^{i_1} \prec_r \cdots \prec_r x^{i_n} \tag{69}$$

となっているならば，$p^{i_1} \cdot x^{i_n} > w^{i_1}$ である．[34]

THEOREM 5.22 与えられたデータ $(x^i, p^i, w^i)_{i \in I}$ が顕示選好の強公理 (5.21) を満たすものとする．さらに X を $\{x^i | i \in I\}$ を含む任意の集合とするとき，X 上の完備な前順序 $\precsim$ が存在して，各データはその選好の下での需要 (68) とみなすことができる．[35]

PROOF： X 上で定義された二項関係 $\prec_r$ をもとに X 上の二項関係 $\prec_*$ を有限個の X の要素 $y^1, \cdots, y^n$ が存在して，$x = y^1 \prec_r \cdots \prec_r y^n = y$ なるとき，そのときに限って $x \prec_* y$ と定義すれば，$\prec_*$ は定義から直ちに transitive，また顕示選好の強公理から asymmetric（従って irreflexive ）となる．$X \times X$ 上の集合の包含関係 $\subset$ を順序と考えて，X 上の irreflexive かつ transitive な二項関係を順序づけると，$\prec_* \subset X \times X$ を含むような transitive かつ irreflexive な二項関係で $\subset$-maximal なものが存在する（ Zorn's Lemma ）．こ

[34] $n = 2$ のとき，すなわち “x^{i_1} が買えるにもかかわらず x^{i_2} が選択されたとすれば，x^{i_1} が選択されるときには x^{i_2} は買うことができない” を顕示選好の弱公理と呼ぶ.

[35] 実は，以下で存在が証明される $\precsim$ は前順序どころか順序になる.

れを $\prec$ で表す．このとき $\prec$ は $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ に対して $x \prec y \vee y \prec x$ を満たす．なぜなら，もしも $(x,y) \notin \prec$ かつ $(y,x) \notin \prec$ とすれば，$\prec' = \prec \cup \{(z,w) | (z \prec x \vee z = x) \wedge (w = y \vee y \prec w)\}$ と置くことで $\prec'$ は transitive かつ irreflexive で，$\prec \subset \prec'$, $\prec \neq \prec'$ となり，$\prec$ が $\subset$-maximal であることに反するからである．$\precsim$ を $x \precsim x' \iff (x = x' \vee x \prec x')$ と定義すれば，$\precsim$ は reflexive, transitive（かつ anti-symmetric，すなわち順序）かつ complete となる．$\precsim$ は $\prec_r$ の拡張であるから，各データがそれを選好と考えた場合の greatest element になることを見るのは容易である． **Q.E.D.**

5.7 補論 3：包絡線定理

変数 p と x（ともにベクトルと考えて）を持つ C^1 級の実数値関数 f に関して

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad && f(p,x) \\ &\text{Sub.to} \quad && g(p,x) = 0 \end{aligned} \tag{70}$$

というような問題が与えられているとしよう．このとき，この問題に対する解が，$(\hat{p}, \hat{x}^*(\hat{p}))$ のとある近傍 $\hat{W} = \hat{U} \times \hat{V}$ においては，$p \in \hat{U}$ を固定するとそれに対して $x^*(p) \in \hat{V}$，となるように，C^1 級の関数 $x^* : \hat{U} \to \hat{V}$ が与えられたとする．このとき，$\hat{U}$ 上で定義される関数

$$F(p) = f(x^*(p), p) \tag{71}$$

の特性（特にその導関数）について考える.（経済学的には，F は間接効用関数，利潤関数，費用関数，支出関数などに該当する.）

関数 F のグラフと f のグラフを同じ $\hat{U} \times R$ 平面に描く（f の第２変数は固定すると考えて，その固定のしかたに応じていくつものグラフを書く）と，f のグラフは第２変数を $x^*(\hat{p})$ と固定した場合の $\hat{p}$ における値などの点で F のグラフに下から接する形状になる（F のグラフは f のグラフの包絡線となる）．一般に F の導関数は

$$DF(p) = D_p f(p, x^*(p)) + D_x f(p, x^* p) Dx^*(p)$$

であるが，特に g が存在しない（制約条件無し）の場合，上式右辺の第２項目は 0 となる.（このことは包絡線の視覚的意味からも明白であろう.）

制約式が存在する場合には，p の変化が制約式の変化を通じて x の動きを制約しているので，上記の視覚的イメージは過った直観を与える（制約式の存在によって，そもそも f のグラフが接点を含む開集合の範囲で描けない）ことがある．包絡線定理については神谷・浦井 (神谷・浦井, 1996; p.308) で一節を設けて解説されている．

REFERENCES

Debreu, G. (1959): *Theory of Value.* Yale University Press, New Haven, CT.

Hicks, J. (1939): *Value and Capital.* Clarendon Press, Oxford. 日本語訳: 価値と資本. 岩波書店, Tokyo.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995): *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, New York.

≪消費主体の理論についての問題≫

EXERCISE 5.1（$\star\star\star$）ある消費者が，ある単位期間において 2 種類以上の労働サービスを供給しうる（たとえば単位期間の長さが 24 時間であるとして，LAWSON の店員として 24 時間働くこともできれば，土木工事の作業員として 24 時間働くこともできるし，両方をおりまぜて 24 時間働くこともできる）ということを，初期保有と消費集合でもって表現したい．このとき最も自然な方法は,「労働サービスについての初期保有は 0 とし，労働供給を負の消費としてとらえる」という方法であろう．これを（負の消費概念をいっさい用いることなく）「余暇に対する（正の数量の）消費」でもってあえて説明するとすれば，どのような言い方をすればよいか.

EXERCISE 5.2（$\star\star$）$\precsim$ を集合 X 上の前順序とする．また $\neg(y \precsim x))$ を $y \succ x$ と書く．(i) $\precsim$ が完備であれば，$\succ = X \times X \setminus \precsim$ であり，かつ $\succ$ は irreflexive, transitive であることを示せ．さらに $(y \succeq x) \iff (y \succ x \vee x = y)$ と定義すれば，$\succeq$ が順序になることを示せ．(ii) もしも $\precsim$ が完備でなければ，$\succ$ は必ずしも transitive ではない．具体例を挙げよ．(iii) $\precsim$ が完備であるとし，$x \precsim y$ かつ $y \precsim x$ なることを $x \sim y$ と書くことにすれば，任意の $x, y \in X$ について $x \succ y$, $x \sim y$, $y \succ x$ のいずれか一つが，そして一つのみが成立することを示せ.

EXERCISE 5.3（$\star\star\star$）X を R^ℓ の連結部分集合とする．完備な前順序 $\precsim \subset X \times X$ が選好の連続性の仮定（定義 xxx）を満たすことと，$\precsim$ が $X \times X$ の閉集合であることが同値であることを示せ.（ヒント：$\succ$ で責める方が得策かも.）

EXERCISE 5.4（$\star\star\star\star$）X を単に位相空間とする．このとき完備な前順序 $\precsim \subset X \times X$ が選好の連続性の仮定を満たすことと，$\precsim$ が $X \times X$ の閉集合であることとは同値か.

EXERCISE 5.5 （$\star\star\star$）Debreu (1959) (Debreu, 1959; Chapter 4) における連続な効用関数の存在証明の第 3 段階において，D' から Q' への mapping u' の値として，Q' の元が取り尽くされる，との主張がある．Q' の要素の数は無限個なのに，なぜ「取り尽くされる」などと言えるのか，そもそもそこで「取り尽くされる」とはどういうことか，詳しく述べよ.

EXERCISE 5.6（$\star\star$）$X \subset R^\ell$ を消費集合とし，$W \in R$ および $p \in R^\ell$ を所与としたときの不等式予算制約 $B = \{x \in R^\ell | \, p \cdot x \leq W\}$ の下での消費行動を考える．予算制約を等号で満たすような範囲，$\{x \in R^\ell | \, p \cdot x = W\}$，を A で表すとき，$A \cap X \neq \emptyset$ であり，かつ選好が（X 上に相対化された R^ℓ の位相の下で）局所非飽和であれば，この消費者の消費の最適点 $x^* \in X \cap B$ は必ず $x \in A$ を満たすことを示せ.

EXERCISE 5.7 （$\star\star$）定理 5.18 の証明の最後に "... 容易に示せるように，これは x^* が最大化問題 (57) の解であることに反する" とある．これを示せ.

EXERCISE 5.8 （$\star\star\star$）定理 5.22 の証明において，(1) $\prec_*$ が asymmetric である（ $x \prec_* y \to \neg(y \prec_* x)$ である）ことと，(2) $\prec'$ が transitive であることを示せ.