先の資料に付け加えて、以下に「一階の述語論理」の詳細を記す。先の資料のみならず、教科書（経済学のための数学入門）でも省略されている（英語の教科書 Fixed Points and Economic Equilbria では Chapter 9 で扱われている）が、以下の内容を先の資料の 3.1 節の内容に付け加えれば、一階の述語論理の何であるかについては厳密に習得したことになる。

以下において、A,B,C は一般的に、一階の述語論理における論理式（先の資料では F1 〜 F4 で構築されたもの）を表している。また以下に出てくる「自由変数」とは、先の資料の F3 で述べられたところの ∀ および ∃ にともなって出現するような変数（束縛変数）以外であることを言う。

〈推論規則〉　一階の述語論理の**推論規則**は、以下の２つである。

（三段論法）　前提 A → B および A から、B という帰結を推論する。

（例示）　前提 A → B から、(∃x, A) → B という帰結を推論する。ただしここで x は B の自由変数ではないものとする。

　三段論法について、説明は不要であろう。例示については、一度じっくりと考えてみることをお勧めする。（ヒント：変数 x が何であろうと A → B が証明されている（真理であると期待されている）ということが、ここでの前提である。B が自由変数 x を含まないとすれば、B の真偽は x の値に依存しないことになるが、そうであるとすれば、A を成立させるあるいはさせないような x の様々な値に対して、B の真偽はどのようなものでなければならないと言えるか。つまり命題論理における → の意味ともいうべき真理値表に基づいて考えるなら、例示という規則は、その意味を変数 x に対する束縛記号 ∃ の意味との関わりによって、述語論理の世界で改めて再述したものである。）

〈命題論理の公理〉

　一階の述語論理において、純粋に命題についてのみ関わる公理（**命題論理の公理**）は以下の３つの形に整理できる。

- A → (B → A)
- (A → (B → C)) → ((A → B) → (A → C))
- (not A → B) → ((not A → not B) → A)

これらを暗記する必要は無い。最初のものは A → A のようなものである。二番目のものは、→ についての分配規則のようなものと思えば、理解しやすいであろう。また三番目は背理法のようなものと考えれば良い。しかし、大事なことはこれらが**恒真式**（真理値表で考えた場合に A, B, C の真偽の在り方に関わらず恒に真）ということである。（→ の真理値表に基づいてそのことを確認せよ。）

　なお、述語論理の公理としては、上に加えて「限量子についての公理」がある。また、前提としている「等号の入った理論」としての「等号に関する公理」を付け加えれば、本講義で扱う「一階の述語論理」の全体系が描かれたことになる。

〈＝に関する公理〉

P を任意の formula とし、s,t を任意の２つの terms とする。このとき　(t = s) → ((P(t) → P(s)) and (P(s) → P(t)))　である。

〈限量子に関する公理〉

P を任意の formula とし、t を任意の term とする。x を P の自由変数とし、P(t) はその自由変数に t を代入したものを表すとする。このとき　P(t) → ∃x P(x)　である。

（参考：Urai (2010), Fixed Points and Economic Equilibria, Chapter 9.）